



TITLE:

液晶対流系のPhase Wave : 実験家の観点から

AUTHOR(S):

佐野, 雅己

CITATION:

佐野, 雅己. 液晶対流系のPhase Wave : 実験家の観点から. 物性研究
1993, 59(5): 539-571

ISSUE DATE:

1993-02-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95051>

RIGHT:

液晶対流系のPhase Wave^{*)}

— 実験家の観点から —

東北大通研 佐野 雅己

(1993年2月1日受理)

目次

1. はじめに
2. 位相波に関する実験事実
 - 2.1 2次元セル構造と振動モード
 - 2.2 局在した位相波とその特徴
 - 2.3 他の実験と関連
3. モデル方程式
 - 3.1 振動のモード
 - 3.2 モデル方程式
 - 3.3 実験との対応
 - 3.4 局在化のメカニズム
 - 3.5 崩壊過程について
4. 振動外場に対する応答
 - 4.1 Phase Shift Line (位相ひも)
 - 4.2 複合欠陥
 - 4.3 位相ひもの運動
5. 結び
6. 参考文献
- 付録1. 液晶対流系と特徴的タイムスケール
- 付録2. Complex Demodulation

1. はじめに

一様で広がりを持った系を平衡から遠く離れた状態に持って行くと、空間的周期構造(散逸構造)、時間的振動状態(リミットサイクル)、時間的および空間的にも乱れた状態(時空カオス)、乱流状態へと次々と転移して行く現象が多くの系で知られている。流体系や化学反応系、光共振系、固体中の励起、神経系や細胞集合体などで、詳細こそ異なるものの、これらの複雑化への転移が一般的に起こっていることが明かになってきている。これらの現象は、その複雑さのために長い間手つかずだったが、ここ10数年のうちに、少

^{*)} 本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

数自由度のカオス現象に関する研究が飛躍的に進歩したおかげで、動的な複雑さに関する理解はかなり進展した。しかし、その一方で、自由度の大きい系の研究は以外と進んでいない。自由度の大きな複雑系には、生態系や免疫系、神経ネットワークなどのように多数の要素が互いに多数と相互作用しているような系も含まれるが、ここで扱う系は要素間

(もし要素らしきものが定義できればであるが) の結合が空間の近傍に限られるような場合に相当している。前者では空間座標は2次的な意味しか持たないが、後者では空間座標は、当然重要な意味を持ってくる。後者では、色々な不安定現象や運動が空間パターンの変化として現われてくるため、パターンダイナミックスの問題として捉えることもできる。また、視覚的に捉えやすいため、面白い現象になると実物を眺めているだけで飽きさせないものがある。(後で述べるような現象を眺めていると、ときどき液晶対流系は生きているのではと錯覚することさえある。) そのため、直感的な理解が数理的な理解に先行することもしばしばある。だが、数理的な理解が開けるととき現象の広がりや深さも再認識される。このノートでは、実験と数理の両方を睨みながら議論を進めていく。

さて、このように空間的・時間的な秩序状態がその対称性を順次失って乱れて行くとき、どのようなシナリオが可能であろうか。またそれには普遍性が存在するだろうか。ここでは、熱対流系や液晶対流系で見つかった実験事実をもとにして、それを記述する方程式を見つけだす過程をとおしてこの目的に迫っていく。

2. 位相波に関する実験事実

非平衡系の動的状態を調べるための実験系として我々は、液晶対流系¹⁾を選んだ。それは、液晶対流系が、大きなアスペクト比を容易に実現でき、特徴的タイムスケールが短く付録1) 良い統計的性質が得られるなどの利点を持つからである。最近、我々は液晶対流系の散逸構造とその動的振る舞いに関していくつかの新しい動的状態を見いだした。

それは、1) 局在した位相波の自発的生成と崩壊、2) 欠陥乱流、3) 振動状態の位相のジャンプからできるPhase Shift Lineとそのダイナミクス、4) パルスの乱流状態、5) 乱流中のLarge Scale Flowと巨視的構造などである。

これら一連の現象は、非線形動力学の観点からは、時間、空間対称性の順次の低下に伴う現象としてより大きな枠組みのなかである程度統一的に理解できる可能性がある。このノートでは、そのための糸口として、特に振動場に関連した問題に焦点をあて、最近とくに理解が進展した1) の局在した位相波と3) のPhase Shift Lineの問題について述べる。

2.1 2次元セル構造と振動モード

液晶対流系では、印加する交流電圧の振幅と周波数を変えると、パラメータの広い範囲でGrid Pattern²⁾と呼ばれる、図1(a)に示したような2次元のセル構造が現われる。

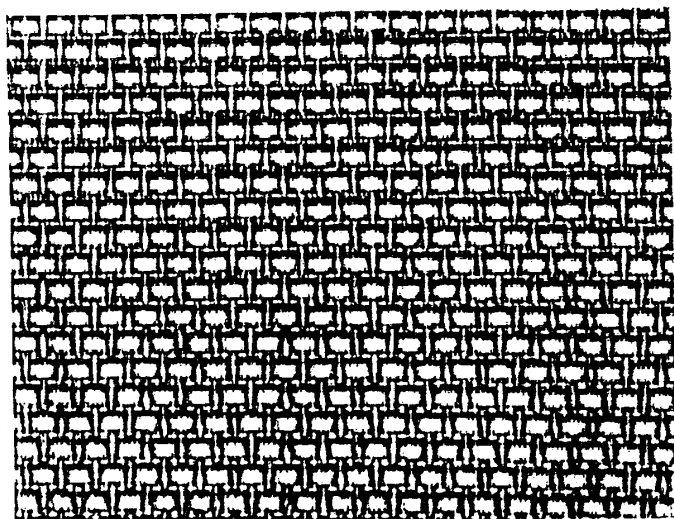


図 1 (a). Grid Pattern

Grid Pattern のセル構造は、流れの観測などから図 1 (b)の様な構造をしている事が解っている。

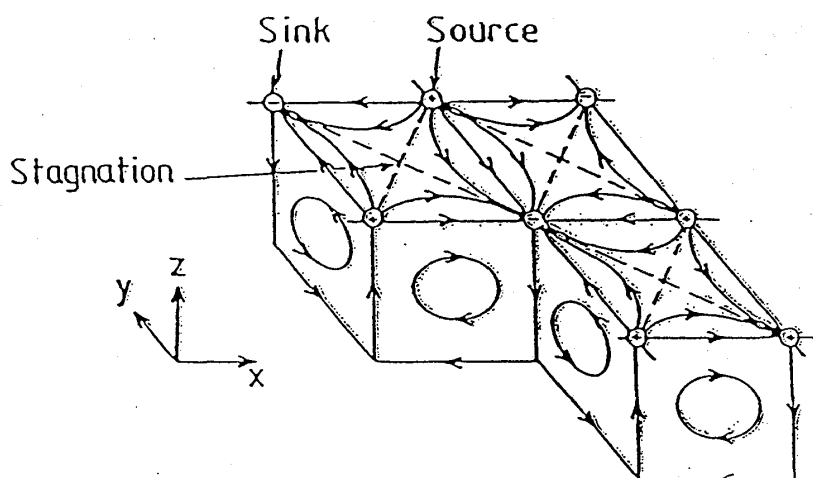


図 1 (b).
Grid Pattern 中の対流構造
(文献3) より転載)

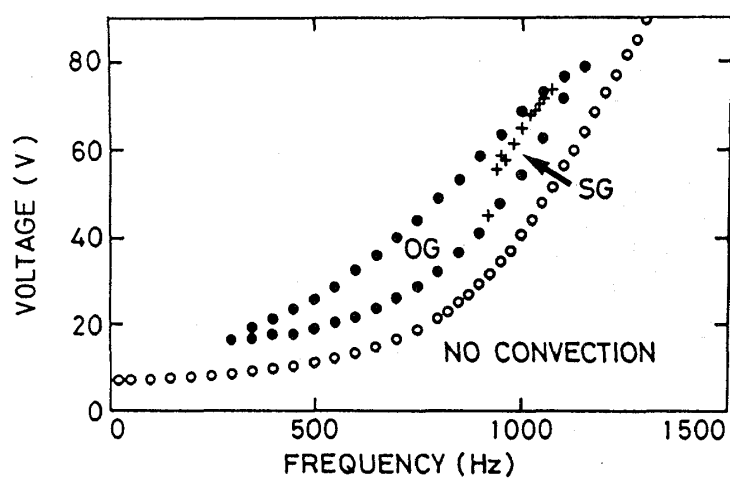


図 2.
印加電圧と周波数をパラメータとした液晶対流の相図

印加電圧を上げると、このセル構造（仮にこれを格子と呼ぼう。）は、リミットサイクル振動を始める。印加電圧と周波数をパラメータとして相図を描くと図2のようになる。SGは、静止したGrid Patternを、OG波、振動するGrid Patternを表す。振動のモードには、今まで見つかっている範囲では2種類あり、その第一のタイプは、図3のような振動である。格子点に着目すると、x方向には左右の往復振動で、y方向にはzig-zag振動を行なっている。このモードをPW1 (Phase Wave 1) と呼ぶことにする。流速の場合や液晶分子の傾きを考えると、写真の中でy方向の2つのユニットがy方向の1波長に対応しており、格子の一つのユニットの中で互いに逆向きの振動を行なっているという意味で、オプティカルモードと呼んでもよいだろう。このzig-zag振動を基本モードとして、さらにこれに長周期のModulationが加わっているのが、写真中でも見ることもできるだろう（左端と右端で振動の位相が180度異なっている）。

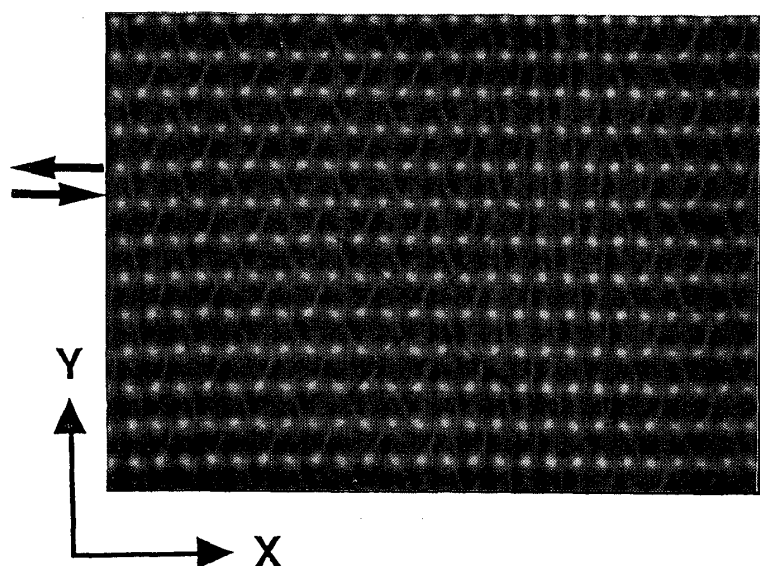


図3. Grid Pattern の振動モード
(Phase Wave 1)

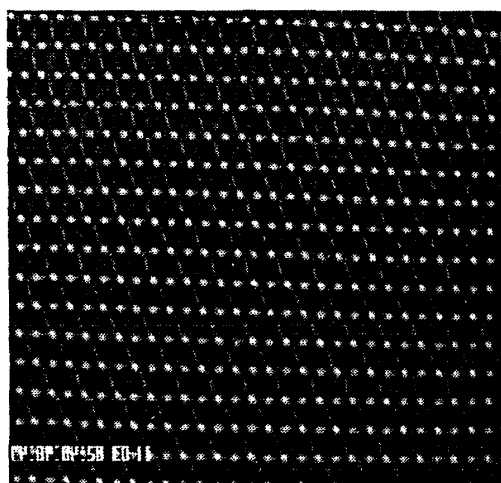


図4. Grid Pattern の振動モード
(Phase Wave 2)

もう一つの振動モードは、次の図4に示すように四角い格子が全体的に交互に左右に傾くタイプの振動である。このモードをPW2 (Phase Wave 2) と呼ぶことにする。

PW1とPW2の二つの振動モードの特徴の大きな違いは；

PW1は、波動を発生する中心（ペースメーカー）や、局在したTarget状のパターンを作るが、

PW2は、ペースメーカーや、局在構造を作らないことである。

両者の振動数は、PW2の方がPW1の約2倍高くなっている。

図5(a)は、液晶対流によって得られた2次元セル構造（格子と呼ぶことにする。）と、その上に生じた振動モード（PW1）がつくるTarget状のパターンである。中心から波動が発生して外側に伝搬していく様子を図5(b)に示す。

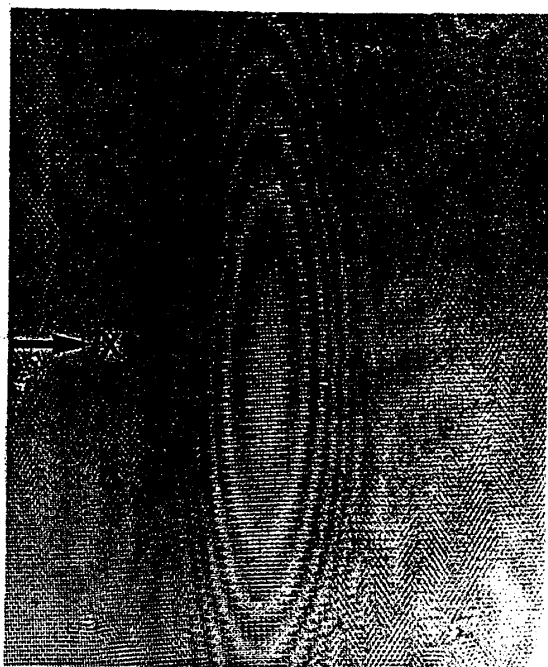


図5(a). Target Pattern

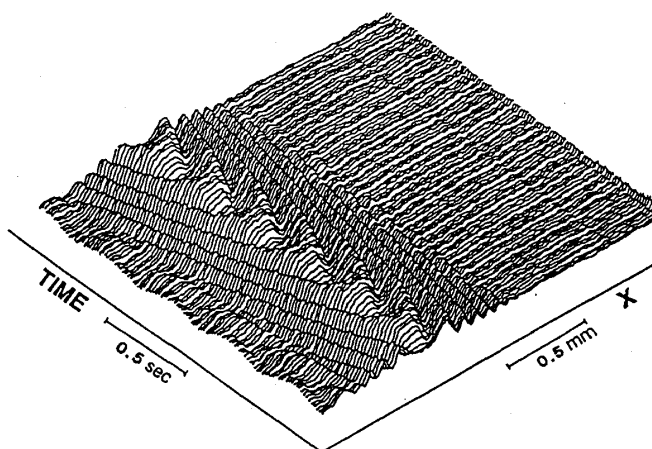


図5(b).Target Pattern 中心から発生する波動の伝搬の様子

2.2 局在した位相波とその特徴^{4), 5)}

通常の状態では、空間構造（格子）は一様、等間隔であるが、波動（PW1）が局在するとき、その下の空間構造（格子）は、もはや一様で等間隔ではなくなる。実験で、Complex Demodulation^{付録2)}の方法を用いて格子の波数や歪みを空間座標 x 、 y の関数として測定することができる。Target パターンが存在するとき、 x 方向の格子の波数を測定した結果を、図6に示す。Target パターンの局在に対応して、 x 方向の波数が減少している（格子の間隔が伸びている）ことが分かる。 y 方向の波数については、測定した結果、実験の誤差の範囲で殆ど一様であることが分かった。

Target パターンの中心を通る x 軸に添って格子の局所的波数 $k(x)$ と振動の振幅 $A(x)$ の分布を測定した結果を図7に示す。両者の孤立波状のパターンの位置が一致していることから、

振動と格子の変形は強い結合状態にあることが推測される。

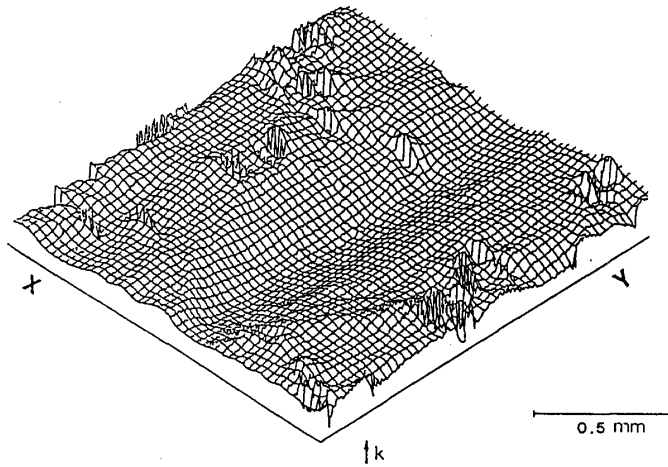


図6. x 方向の格子の波数の測定結果

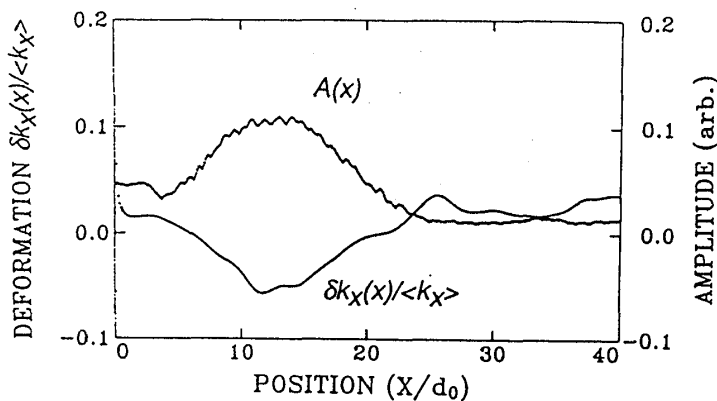


図7. Targetの中心を通る x 軸方向の格子の波数シフト $\delta k_x(x)$ と振動の振幅 $A(x)$ の測定結果

このTargetパターンは、生き物のようにLife Cycleを持っている。つまり、一様な格子の上に自発的に生成し、中心を作り成長し、最後に崩壊する。この崩壊過程に着目して、Targetパターンの中心の波数および振動の周波数の時間発展を測定したのが、図8の結果である。時間と共に、周波数が上昇し、同時に波数が減少し、最後にあるしきい値に達したとき突然、波数が上にジャンプしている。これは、中心付近で新たな対流のロール対（すなわちDislocation）が作られたことを意味している。この後、Dislocation (Topological Defect) は、空間的に動き回った後、逆向きのDislocation (逆符号を持ったTopological Charge)と衝突して消滅する（対消滅）。このようにして再び一様になった格子構造からまた次の新しいTargetパターンが生まれるのである。図9に、崩壊時にDislocationが生成される様子を示す。

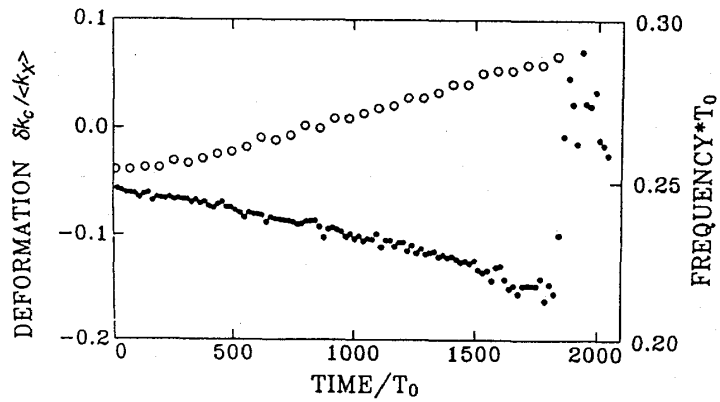


図8.Targetの中心での格子の波数シフト δk_c (●) と振動の周波数 (○) の時間発展 ($t/T_0 \approx 2000$) でTargetが崩壊して欠陥が発生したため δk_c にジャンプが生じている。

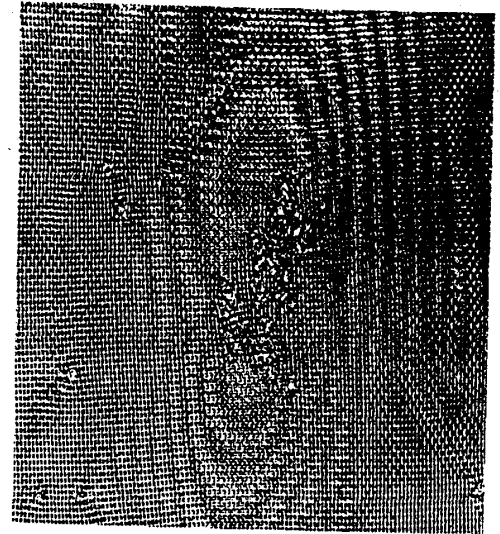
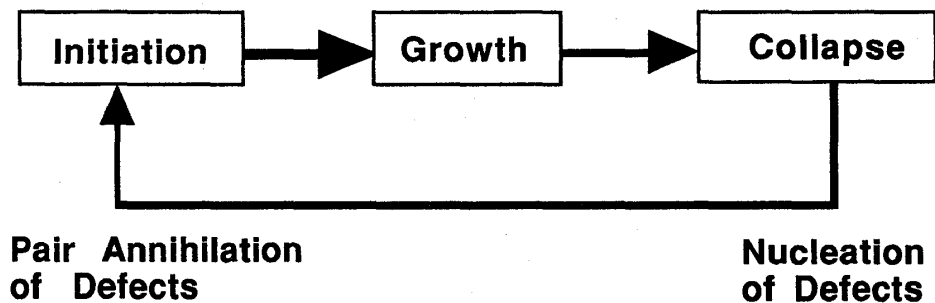


図9 Target Pattern の崩壊とDefectの生成



Target Pattern のライフサイクル

2.3 他の実験との関連

この現象の特徴は、最初に空間的周期パターンが形成され、その2次不安定現象として空間パターンの振動や変調などの現象が現われることである。多彩で複雑な振る舞いは、振動と空間の周期構造が相互作用することに起因している。BZ反応などの化学反応系の振動との違いはそこにある。BZ反応などでは、ペースメーカーの形成は見られるが、波動パターンの局在や崩壊といった現象はもちろん見られない。

しかし、この種の実験結果は詳細こそ異なるにせよ、液晶対流系に限らず、様々な実験系でも見られる。熱対流系^{7, 14)}やTaylor-Couette流⁹⁾、またdirectional solidificationやdirectional viscous fingeringなどの2相界面に生ずるパターン⁸⁾などでも非平衡度を上げていくとき最初に空間的周期構造が形成され、その後次の不安定化が起こる。これらの系ではこれまでに、Parity Breaking不安定(左右対称性が破れたパターンがどちらかに運動し始める)やパターンが消失する不安定、空間的周期倍化、振動、Spatiotemporal Intermittencyなどの現象が見つかっている。詳細は文献にゆずる。

3. モデル方程式

我々は、上で述べたようなPhase Waveの生成や、局在化、崩壊を物理的、数学的に理解したい。そのためには、なるべく簡単でしかも本質を捉えた方程式でこの現象を記述したい。その方法として、個々の現象に対応した基礎方程式を直接計算するのではなく、系の対称性や最も重要な少数のモードに着目し、自由度の低減された方程式を導く方法をとる。

そして、その解の分類や普遍性を調べることが、本質により近付く方法であると考えられる。

以下では、最初にPhase Waveの振動モードについて述べ、その後でモードのダイナミクスを記述する方程式としてSakaguchi¹³⁾とCoullet¹²⁾の最近の結果を紹介する。

3.1 振動のモード

液晶対流の2次元セル構造のパターンを $U_0(x, y)$ と表すことにする。これは、例えばネマティック液晶分子の回転角や速度場の成分と考えてよいだろう。このパターンはあるパラメータ領域では、安定で定常、しかも空間的な周期関数になっている。

$$U_0(x+na, y+mb) = U_0(x, y), \quad (n, m = \pm 1, 2, \dots) \quad (1)$$

但し、ここで $a = 2\pi/k_x$, $b = 2\pi/k_y$ は、それぞれ x 及び y 方向の波長を表す。

簡単のために以下ではなるべく低い次数の周期関数によって空間パターンや振動モードを表す事にしよう。今の場合、2次元セル構造は、次の様に表せる。

$$U_0(x, y) = G \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

また、次のように2つの斜めのロール構造の重ね合わせと見ることもできる。

$$U_0(x,y) = U_0^+(x,y) + U_0^-(x,y) \quad (2)$$

$$U_0^\pm(x,y) = B^\pm(X,Y,T)\cos(k_x x \pm k_y y) \quad (3)$$

なぜならば、 $B^+ = B^- = B$ の場合次のようになるからである。

$$U_0(x,y) = B\{\cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y)\} = 2B\cos(k_x x)\cos(k_y y) \quad (4)$$

重ね合わせの表示と積の表示をうまく使い分けると都合がよい。図10に二つの斜めのロール状パターンとその重ね合わせでできる2次元格子状のパターンを示す。パターン $U_0(x,y)$ の最大と最小をそれぞれ例えば、上昇流(+)と下降流(-)に対応させると、図10は、上昇流と下降流を同等に表示した場合に相当している。上昇流または下降流だけを表示すると図11のようにブロックを積み重ねたような構造になる。実験では、顕微鏡の焦点を変えることにより、これらの異なったパターンを見ることができる。

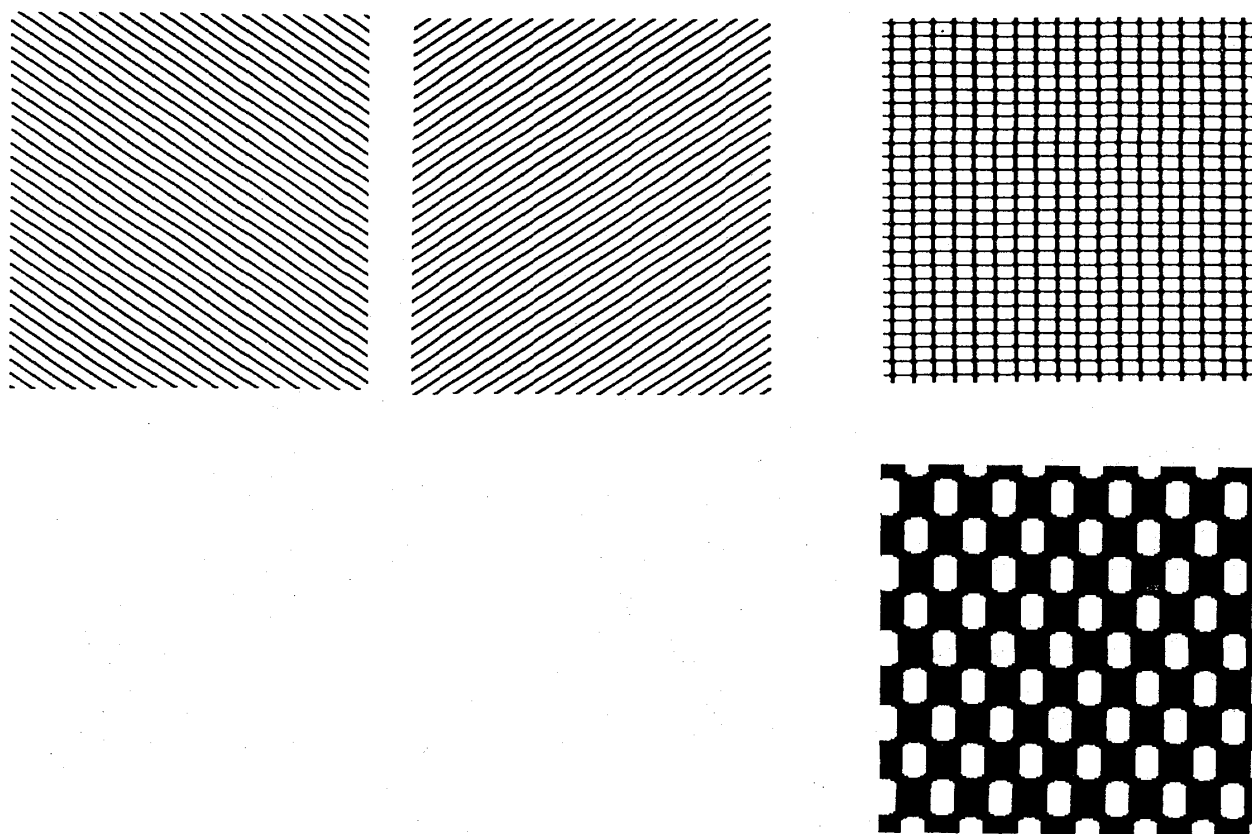


図10. (上段) 2つの斜めロールの重ね合わせによって表されるGrid Pattern

図11. (下段) Grid Pattern (上昇流だけを表示した場合)

さてここで、Phase Waveがどのような振動モードで表せるか考えてみよう。Targetパターンを形成するPW1は、パターンの輝度の極大値の位置に着目すると、y方向にzig-zag運動、x方向には左右に移動する往復運動であった。基本パターンの位置が振動することを最もあらわな形で表すため次のように、x方向の位相が時間的に振動すると考えよう。

$$U(x,y,t) = U_0 (x + \phi_x + \Psi(x,y,t), y + \phi_y)$$

ここで ϕ_x, ϕ_y は、系が並進対称性を持つことからくる位相で任意の値を取りうる。

$\Psi(x,y,t)$ は振動する位相でPhase Waveを表す。より具体的には、基本フーリエモードだけを用いて次の式を考える。

$$U^\pm(x,y,t) = \cos \{ (k_x x + a \cos \omega t \sin k_y y) \pm k_y y \} \quad (5)$$

すなわち、xの位相が変調を受けy方向にzig-zagの往復運動をすると考えるのである。

(5)式は複雑なので基本パターン+小さな摂動(振動モード)と言う形で書けないだろうか。(5)式を展開して、aが小さい量であるとして近似を行なうと望む形が得られる。

$$\begin{aligned} U(x,y,t) &= \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(a \cos \omega t \sin k_y y) \\ &\quad + \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(a \cos \omega t \sin k_y y) \\ &\approx \cos(k_x x) \cos(k_y y) + a/2 \cos \omega t \sin(k_x x) \sin(2k_y y) \\ &\equiv U_0(x,y) + u(x,y,t) \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式を計算した結果を図12に示す。左から右への変化を時間的に繰り返す。実験で得られるパターンを良く表していることが分かる。

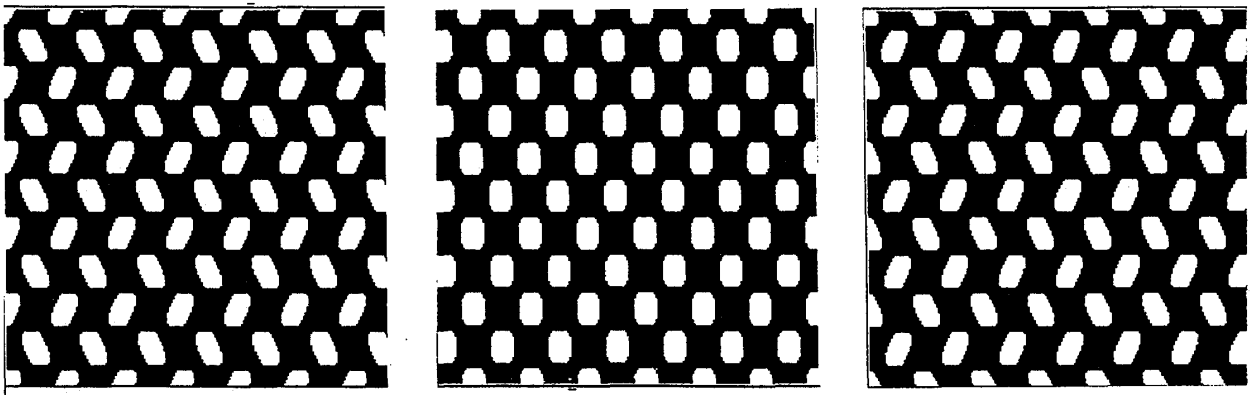


図12. 振動モードPW1 (左から右への変化を繰り返す。)

一方、Targetパターンを作らない振動モードであるPW2の方は、どう書けるであろうか。PW2モードは、二つの斜めのロール構造が交互に強くなったり弱くなったりする振動であると考えたと実験に非常に近いパターンが得られる。これを記述するモードは、基本パタ

ーンの振幅の変調で表され、二つの斜めのモードの振動の位相がずれている（180度）とするとうまく記述できる。

$$\begin{aligned}
 U(x,y,t) &= \{1 + a \cos \omega t\} \cos(k_x x + k_y y) + \{1 + a \cos(\omega t + \pi)\} \cos(k_x x - k_y y) \\
 &= U_0(x,y) + 2a \cos \omega t \sin(k_x x) \sin(k_y y)
 \end{aligned} \tag{7}$$

この式で表されたパターンを図13に示す。パターンは、時間的に左図と右図の状態を振動的に繰り返す。

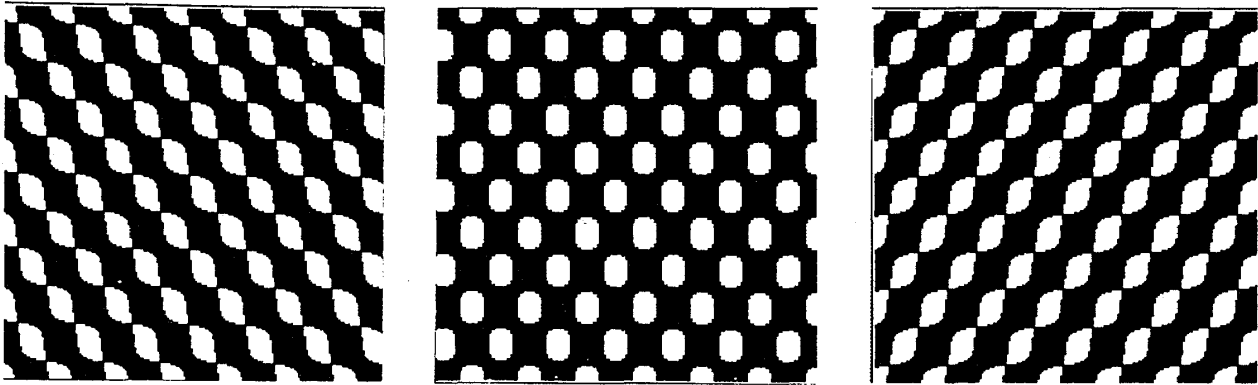


図13. 振動モードPW2（左から右への変化を繰り返す。）

ここまでで、分かったようにPhase Waveの2つのモードは、2つのことなるModulationの形式に対応していて、PW1は位相変調（Phase Modulation）、PW2は振幅変調（Amplitude Modulation）に近いものであった。このことの物理的意味をもう少し考えてみよう。結局、振動モードは、次のように基本パターン+振動の形で書けることが分かった。

$$U(x,y,t) = U_0(x,y) + u(x,y,t) \tag{8}$$

ここで、振動項は $u(x,y,t) = A e^{i\omega t + \psi} V(x,y)$ のような形をしている。PW1とPW2はそれぞれ、並進移動に関する任意の位相 ϕ_x と ϕ_y を含めて次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 \text{PW1モード: } V(x,y) &= \sin(k_x x + \phi_x) \sin(2k_y y + 2\phi_y) \\
 \text{PW2モード: } V(x,y) &= \sin(k_x x + \phi_x) \sin(k_y y + \phi_y)
 \end{aligned} \tag{9}$$

今、二つのモードを対称性によって分類することを考え、次のオペレータ P を定義する。 $P : (\phi_x, \phi_y) \rightarrow (\phi_x + \pi, \phi_y + \pi)$ するとPW1モードは、 P に対して反対称、PW2モードは、 P に対して対称モードになっている。

$$\text{Phase Wave 1 : } P V = -V$$

$$\text{Phase Wave 2 : } P V = V$$

それぞれの振動モードを簡単のために y 方向の依存性をなくして1次元で考えると次のようになり、PW1とPW2の違いは1次元ではなくなってしまう。

$$\text{PW1, PW2: } U(x,t) = \cos(k_x x) + a \cos \omega t \sin(k_x x)$$

1次元の場合に振動モードを対称性で分類すると、空間反転に関する対称性がまず問題になる。空間反転を表すオペレーターを、 $S: x \rightarrow -x$ とおき、基本パターンは空間反転に対して対称（偶関数）であると仮定する（逆に奇関数と仮定してもよい）。振動項には、次の二つの場合が考えられる。

$$\begin{aligned} \text{対称モード} &: S V^\pm = V^\pm \\ \text{反対称モード} &: S V^\pm = -V^\pm \end{aligned} \quad (10)$$

反対称モードの振動はVascillation, 対称モードの振動は、Breathing Mode とも呼ばれる¹²⁾。この分類では、PW1, PW2 とも1次元では反対称モードであることが分かる。これらに対応する振動の時空間での振る舞いをプロットした結果を図14に示す。

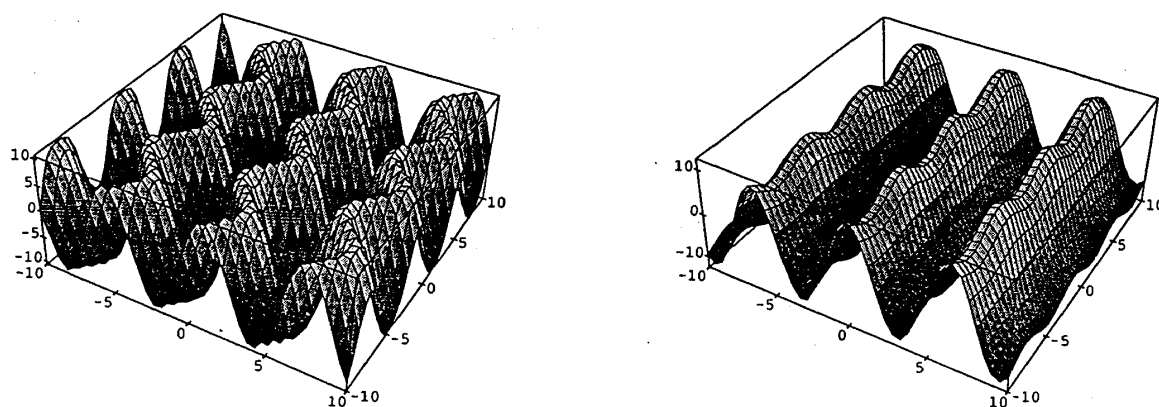


図14. Vascillation Mode (左図) と Breathing Mode (右図)

2次元の場合には、+と-のモードの間の振動の位相関係が問題になるが、ここでは簡単にPW1に関しては位相差0、PW2に関しては位相差（180度）とした。これらは、本来ならばダイナミックスの自然な帰結として導かれるはずである。（Sasa²³⁾）しかし、ここではこれ以上は立ち入らない。

3.2 モデル方程式

以下では、格子の変形と振動モードが満たすべき方程式を、Coulet¹²⁾ と Sakaguchi¹³⁾ に従って導こう。考えている実験系を記述する偏微分方程式を、

$$\partial_t U = F_\mu(U)$$

おこう。まず最初に y 方向の依存性を無視して 1 次元の場合を考える。Couletに従って、次の仮定をおこう。

1) この方程式は、周期関数 $U_0(x)$ を定常解として持っている。

すなわち、 $U_0(x+a) = U_0(x)$ で、 $\partial_t U_0(x) = F_\mu(U_0(x)) = 0$ を満たす。

2) $U_0(x)$ は、偶関数である。(逆に奇関数と仮定してもよい。)

$$SU_0 = U_0$$

3) この系は、 x に対する並進対称性を持っている。

つまり、任意の定数 ϕ に対して、 $U_0(x)$ が解ならば $U_0(x+\phi)$ もまた解である。

$$\partial_t U_0(x+\phi) = F_\mu(U_0(x+\phi)) = 0$$

4) $\mu = 0$ で、振動的な不安定が起こる。

3) の仮定をもとに微少な ϕ に対して展開を行なうと、

$$\partial_t (U_0 + \phi \partial_x U_0 + \dots) = F_\mu(U_0) + \partial_U F_\mu(U_0) \partial_x U_0 \phi + \dots = 0$$

$L \equiv \partial_U F_\mu(U_0)$ とおいて (1) の性質から次の結果が得られる。

$$\partial_t (\phi \partial_x U_0) = L \partial_x U_0 \phi = 0$$

すなわち $\partial_x U_0$ は、線形オペレーター L のkernelになっている。言い換えれば、並進操作 ϕ に対する復元力がないため、 $\partial_x U_0$ は、固有値 0 を持つ中立モードになっている。4) の仮定は、我々の実験では、新たな振動モードが発生することに対応している。

3.1 で述べたように、基本パターンの振動の形式には振幅変調と位相変調の 2 種類が考えられた。周期関数 $U_0(x)$ に対して、両方の Modulation を含めて書くと、次のようになる。

$$U(x,t) = \{1 + a(x,t)\} U_0(x + \phi + \Psi(x,t))$$

$$\approx U_0(x) + a(x,t) U_0(x) + \phi \frac{\partial U_0}{\partial x} + \Psi(x,t) \frac{\partial U_0}{\partial x}$$

第 1 項は基本パターン、第 2 項は振幅変調、第 3 項は並進モード、第 4 項は位相変調を表している。ここで注意しなければならないのは、 U_0 が偶関数ならば、 $\partial U_0 / \partial x$ は奇関数であり、振幅変調のモードと位相変調のモードは異なった対称性を持つことである。しかし、第 3 項と第 4 項が一見同じ固有関数 $\partial_x U_0$ を持っているように見えるのは注意を要する。第 3 項は、固有値 0 の中立モード、第 4 項は (振動的なので) 固有値 $\pm i\omega$ の中立モードで異なる固有ベクトルを持つため、固有関数は異なった成分を持つはずである。1 次元でこの条件を満たすためには、例えば $\Psi(x,t)$ が空間的に a とは異なった周期で変調を受けていて $\Psi(x,t) \partial U_0 / \partial x$ 並進モードと異なっていればよい。あるいは、基本周期と高調波成分の和で表されるようなモードを考える必要がある。

2 次元では、 y 方向の依存性のためこの条件が比較的容易に満たされるようになっている、それが PW1 や PW2 モードの表式である。

3.1 で述べたように、基本パターンとその振動は、次のように書くことができた。

$$U(x,y,t) = U_0(x,y) + u(x,y,t)$$

摂動である振動モードは、周期関数 $U_0(x, y)$ の上に乗っているのでフロケの定理（固体物理ではブロッホの定理として知られている。）より、 $e^{ik_x x + ik_y y} e^{i\omega t + \psi} V(x, y)$ のような形をしていなければならない。ここで、 $V(x, y)$ は $U_0(x, y)$ と同じ周期性を持つ周期関数である。一方、考えている系は空間の並進対称性を持っているため、無限小の空間変位に対する応答の固有値は零である。つまり、 $\eta_1(x, y) = \partial_x U_0(x, y)$ と $\eta_2(x, y) = \partial_y U_0(x, y)$ がこの系の中立モードになっている。一方、摂動モードの $V(x, y)$ は、 $\pm i\omega$ の固有値を持っているので、固有値 0 のモードとは異なる固有ベクトルを持っているはずである。従って、適当な直交化により、 $V(x, y)$ としてこれら中立モード $\eta_1(x, y)$, $\eta_2(x, y)$ で張られる関数空間と直交するようにとることができる。このことから関数空間で定義された次のスカラー積が零であることが要請される。
 $\langle u, \eta_i \rangle = 0 \quad (i=1, 2)$ ただし、スカラー積は次式で定義される。

$$\langle V, \eta_i \rangle \equiv \int_{\Omega} \hat{V}(x, y) \eta_i(x, y) dx dy \quad (i=1, 2) \quad (11)$$

ここで $\hat{V}(x, y)$ は、 $V(x, y)$ に adjoint な関数である。前節で考察した PW1 と、PW2 の二つのモードは、この要請を満たしていることが分かる。

系が 1 次元 (x のみ) であると PW1 モードは単に $\sin(k_x x)$ となるため中立モード $\eta = \partial_x U_0(x) = \sin(k_x x)$ と一致してしまい、このままでは許されない。高調波か分数調波まで考える必要がある。実際、1 次元で Vascillation Mode は、 $k = \pi/a$ （すなわち、基本周期の 2 倍の波長モード）として現われている例が報告されている。又、無理数倍の変調としても可能であるが、対応する実験は報告されていない。さて、各振動モードは時間的にも空間的にもゆっくりと変調を受けていてよいので、 X, Y, T を遅い変数として次のように書くことができる。

$$u_0(x, y, t) = A(X, Y, T) e^{i\omega t} \sin(k_x x) \sin(2k_y y) + c.c. \quad (12a)$$

$$u_0(x, y, t) = A(X, Y, T) e^{i\omega t} \sin(k_x x) \sin(k_y y) + c.c. \quad (12b)$$

さて、自由度の低減された方程式の説明に移ろう。以下では簡単のために y 方向の依存性を無視して 1 次元の場合を考える。実験的には 2.2 で述べたように格子の y 方向の位相 ϕ_y は、殆ど変化せず、 x 方向の位相 ϕ_x のみが Target Pattern 中で変化していることから、格子の歪みに対する不安定性は、 ϕ_x のみを考えればよく、その意味で 1 次元のモデルは本質を失ってはいない。

$$U(x, t) = U_0(x + \phi) + A(X, T) e^{i\omega t} V(x + \phi) \quad (13)$$

$\phi(X, T), B(X, T)$ の満たすべき方程式は、可解条件から得られるはずであるが、ここでは系の対称性を満たすように次のように置く。^{12, 13, 14)}

$$A_t = \mu A \cdot (1 + ic_2) |A|^2 A + (1 + ic_1) A_{xx} + (\xi_1 + i\xi_2) \partial_x \phi A \quad (14a)$$

$$\phi_t = \phi_{xx} + \delta \partial_x (|A|^2) + i\beta \{ A_x \bar{A} - A \bar{A}_x \} \quad (14b)$$

この方程式は、次の対称性を満たしている。

並進対称性： $x \rightarrow x + \theta, B \rightarrow B e^{i\theta}$

空間反転対称性： $x \rightarrow -x, \phi \rightarrow -\phi$

(14) 式で、 $A(X, T)$ を $A(X, T) = A_0 (1 + a(X, T)) e^{i\Psi(X, T)}$ とおいて位相方程式を導くと次のようになる^{13, 14)}。

$$\Psi_t = D_\psi \Psi_{xx} + \xi' \phi_x + \Psi_x^2 \quad (15a)$$

$$\phi_t = \phi_{xx} - \beta' \Psi_x \quad (15b)$$

但し、 $D_\psi, D_\phi, \xi', \beta'$ は (14) 式の係数から決まる新たな係数で、

$D_\psi = (1 + c_1 c_2 - c_2 \beta \xi_1), D_\phi = (1 + \delta \xi_1), \xi'' = \xi_2 - c_2 \xi_1, \beta' = 2\mu\beta$ などで与えられる。

周期パターンの局所的波数は、 $k = \phi_x$ で与えられるので、(15a) 式を x で微分して、

$$\Psi_t = D_\psi \Psi_{xx} + \xi' k + \Psi_x^2 \quad (16a)$$

$$k_t = D_\phi k_{xx} - \beta' \Psi_{xx} \quad (16b)$$

という結果が得られる。ここで不安定化の機構は明白になる。

フーリエ展開して $\psi = \psi_q e^{iqx}, \phi = \phi_q e^{iqx}$ とおき、線形安定性解析を行なうと

$\beta' \xi' / D_\psi D_\phi > 0$ のときに $q^2 < \beta' \xi' / D_\psi D_\phi$ を満たすモードが位相不安定性を起こすことが解かる。従って位相不安定性の条件は、

$$\frac{\beta' \xi'}{D_\psi D_\phi} > 0$$

で与えられる。実験結果を説明するために $\xi' < 0, \beta' < 0$ とする。今図15に示すように、仮にある位置でゆらぎにより波数が減少したとしよう ($k < 0$)、すると $\xi' k > 0$ のため Ψ が増加する結果 $\Psi_{xx} < 0$ となる。(16b) 式から $-\beta' \Psi_{xx} < 0$ のため k は更に減少する。このように格子と波動の間にフィードバック的な相互作用が働くためゆらぎは増幅され、中心では波数が減少し (格子の間隔が伸びる) 振動の位相は進む結果、中心から位相波が発生するように見える事になる。一般には、 $\xi' \beta' > 0$ であれば不安定化が起こることになる。

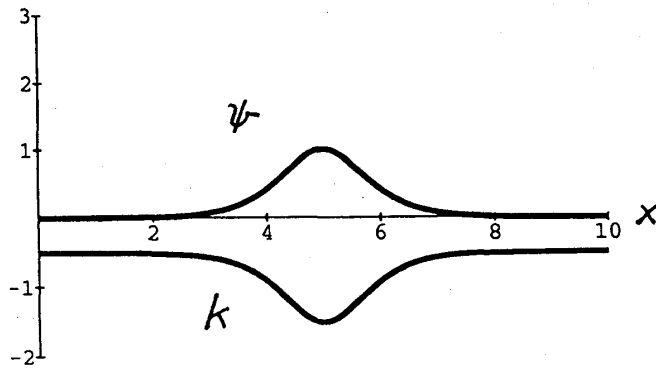
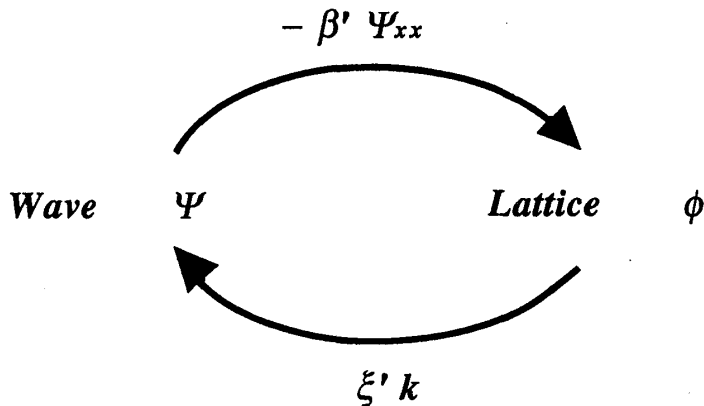


図15. 波数と振動位相の初期ゆらぎと不安定化による増大

つまり、振動モードの位相と空間パターンの位相（又は、波数）の間に次のような正のフィードバック機構が働けばこのような不安定性が起こることになる。



(16) 式を y 方向にも位相が拡散するように 2 次元に拡張し、計算機でシミュレートした結果を図16に示す。Target パターンが生成され、同時に中心付近で格子の間隔が延びていることが分かる。

次に、何故振動モードと格子間隔の間に相互作用が現われるのかを物理的に考えてみよう。(16a) 式の右辺の第 3 項は格子間隔の変化が振動の位相 $\Psi(x)$ の時間変化（すなわち周波数）に影響するということを意味している。このことは比較的理解しやすい。一般に非線形のパネはそういう性質を持つ。（厳密にはリミットサイクルとパネのアナロジーは正しくないが）直感的に理解しにくいのは、振動の位相から格子間隔への相互作用であろう。(16b) 式の $\Psi(x)$ の 2 階微分が格子の波数に影響を与えるというのは、すんなりとは納得しにくい。そのためにまず、PW1モード又は、Vascillation モードについて考えてみよう。固体の格子振動とのアナロジーを行ない易いように、空間パターンのピーク的位置をあたかも原子のように黒丸で表示しよう。平衡位置では、これらは等間隔に並んでいる。今、振動が起こったとし、しかも中心部だけ振動の位相が進んでいるとしよう。つまり $\Psi(x)$ が図18のような分布をしていたとする。

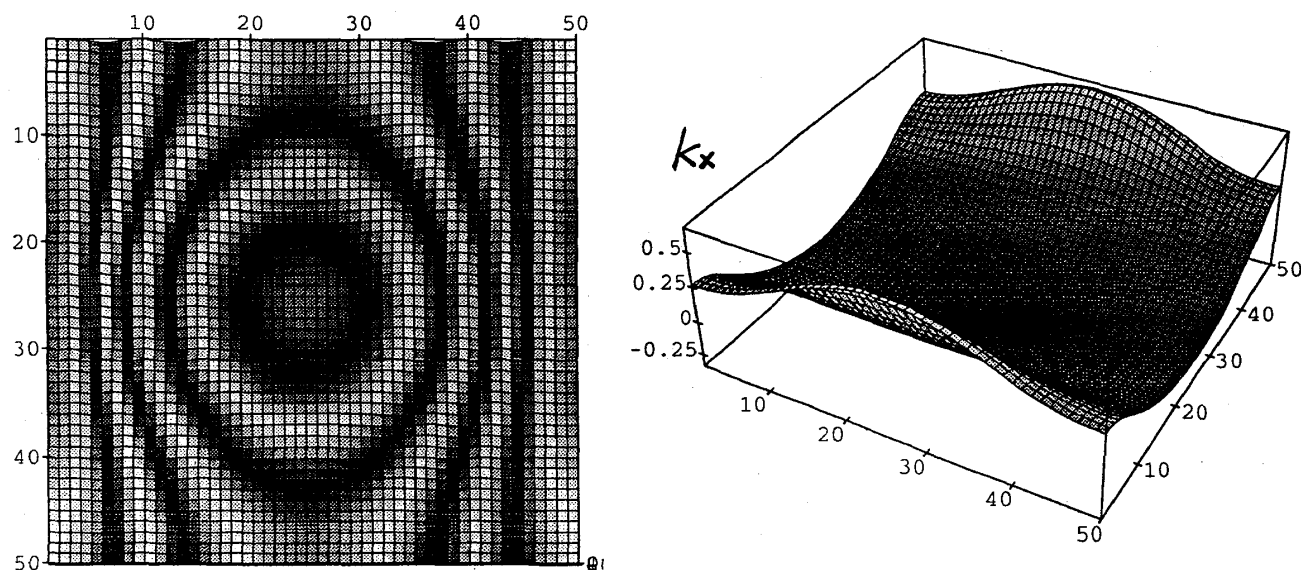


図16. Target Pattern のsimulation (左は、波動の様子、右は格子の波数シフト)

すると、中心から少し離れた場所では隣りとの位相差が大きいのので、図17のように格子間隔の変位が他の場所に較べて非常に大きくなったり、小さくなったりという状態を繰り返すことになる。つまり、他の場所に較べて格子の変位の振幅が大きいことになる。もちろん、その逆に縮まるような（非線形の）バネも存在してよい。

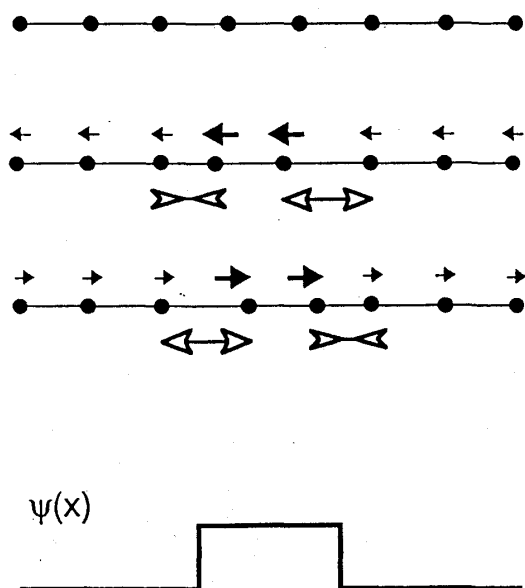


図17. 格子振動とのアナロジー

$\Psi(x)$ の形がもう少し滑らかになって、曲率をもつ丸い山形になっても上の事情は同じである。この効果は、 $\Psi(x)$ の曲率によって決まっていることが分かるだろう。（但し、この説明では $\Psi(x)$ の曲率の正負に依存せず同じ効果を引き起こす。（16b）では、符号

に寄っているのにである。何故？ バネのアナロジーの限界であろうか？)

また、なぜPW2モード (Breathing Mode) は、格子間隔を変えないのだろうか。結合項が存在しないのか、あるいは存在しても不安定化条件を満たしていないのだろうか。現在のところは、何も確定的なことは言えないが、対称性などの考察から結合項が許されるか否かぐらいは理論的に言えるのではないだろうか。

また、結合項の $i\beta \{ A_x \bar{A} - A \bar{A}_x \}$ は、 A を確率振幅と見なすと量子力学における確率の流れと似た形をしているので、 $A = \sqrt{\rho} e^{i\psi}$ などとおくと $j = \partial_x \psi$ となり、位相差に比例した電流の意味を持つ。このように、超伝導現象とのアナロジーなども解釈に役立つかも知れない。

3.3 実験との対応^{6, 15)}

さて、上で述べたモデルがどの程度実験と一致するかの検証に進もう。

我々は、方程式 (16) の線形項の係数を実験で決定し、我々の系が位相不安定性の条件を満たしていることを確かめた。実験方法としては、(16) 式の右辺において、できる限り1項だけが効いて他の項は無視できるように初期条件その他を制御する方法をとった。

まず ξ' の決定であるが、(16a) 式の右辺 Ψ_t は、振動位相の時間変化すなわち振動数のシフトであることに着目すると、左辺の $\xi' k$ の項は格子の波数のシフト k による振動数のシフトを表している。印下電圧と周波数を適当に選び、初期条件として望む波数シフト k をもった静止した Grid Pattern を用意した後、元の印下電圧と周波数に瞬間的にジャンプする。その直後に発生する振動は、 k が空間的に一様で右辺第1項もほぼ無視できるので、この時の振動数を k を変化させて測定すると図18のようになり、その傾きが ξ' を与える。これから、 $\xi' = (-0.48 \pm 0.05) d_0 / T_0$ という結果が得られる。

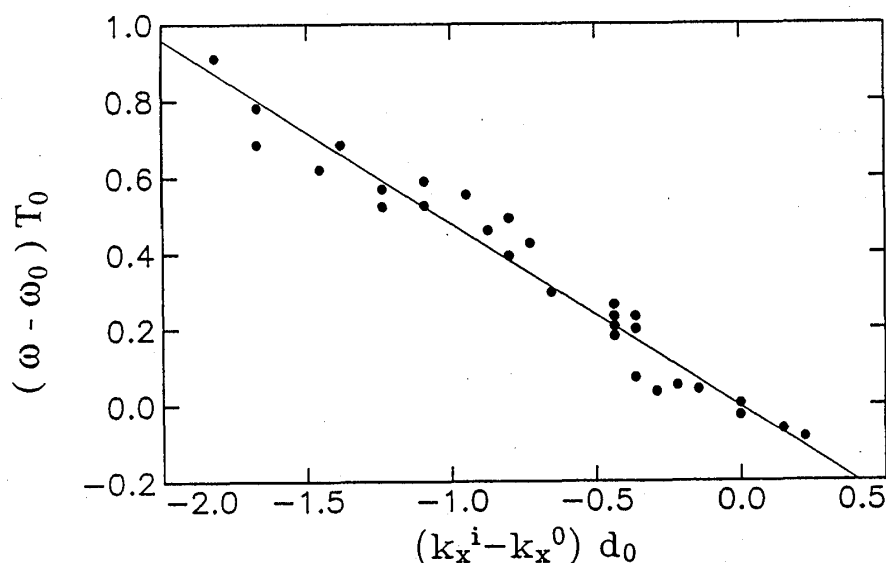


図18
格子の波数を変えたときの
振動数変化
(傾きが ξ' を与える。)

(16b) 式の拡散係数 D_ϕ は、格子の歪みの緩和過程を測定することにより得られる。 D_ϕ が印下電圧のわずかな変化にはよらないと仮定し、印下電圧をわずかに下げ振動を止めたときに Target Pattern の中心付近での格子の歪みが一樣状態に緩和してゆく過程を測定した。図7のような格子の歪みをほぼガウス分布に近いと考えると、ピークの値 k_p は時間に対して $t^{-1/2}$ で減衰するはずである。実際測定してみると $1/(k_p d)^2$ と時間の間に良い比例関係が成り立っていることが解かる。(図19) またこのときピーク値 k_p と半値幅 l の積を計算してみると時間によらず一定値をとり、このことからこの緩和過程は面積を保存する拡散過程になっていることが解かる。図19の傾きから

$D_\phi = (4.2 \pm 0.7) \times 10^{-2} d_0^2 / T_0$ という結果が得られる。

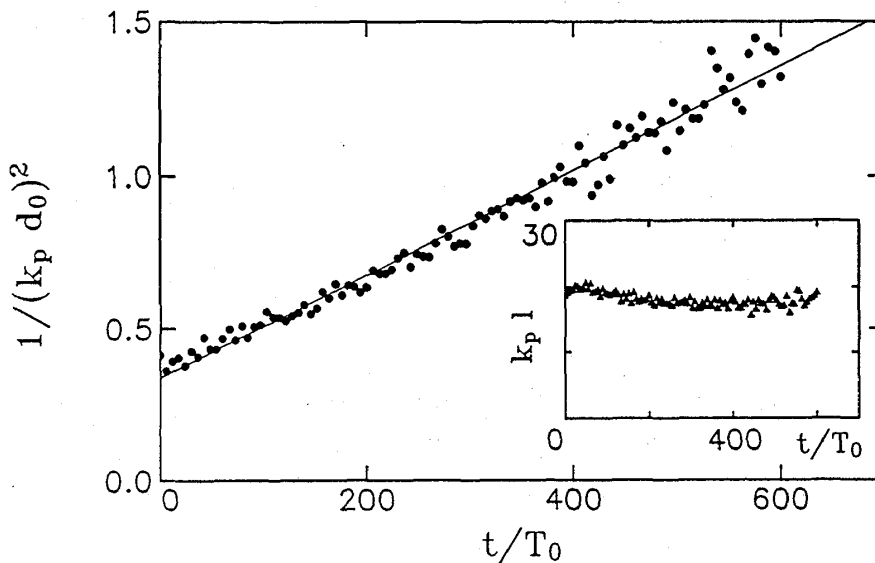


図19

Target Pattern の緩和過程
ピークの値 k_p の時間変化
が拡散過程であることを
示している。

(16b) 式の結合係数 β' は、Target Pattern の成長過程のデータから得られる。Target Pattern の中心で右辺の2種類の曲率 k_{xx} と ψ_{xx} を時々刻々測定する。この時、左辺 k_t がほぼ一定であることを利用して(波数のシフトの時間変化がゆっくりでしかもほぼ一定速度)、 k_{xx} と ψ_{xx} が比例関係にあればその比例係数は D_ϕ/β' を与える。図20のように両者は比例し、 $D_\phi/\beta' = (-2.43 \pm 0.03)d_0$ が得られた。(k_t もほぼ一定である。) 前に得られた D_ϕ の値から $\beta' = (-0.017 \pm 0.002)d_0/T_0$ という値が得られる。 β' は理論が正しければHopf分岐のパラメータ μ (すなわち印下電圧) に敏感に依存する。以上の測定を μ を変化させて測定することにより、 $\beta' = -0.47\mu - 0.01$ という結果が得られた。

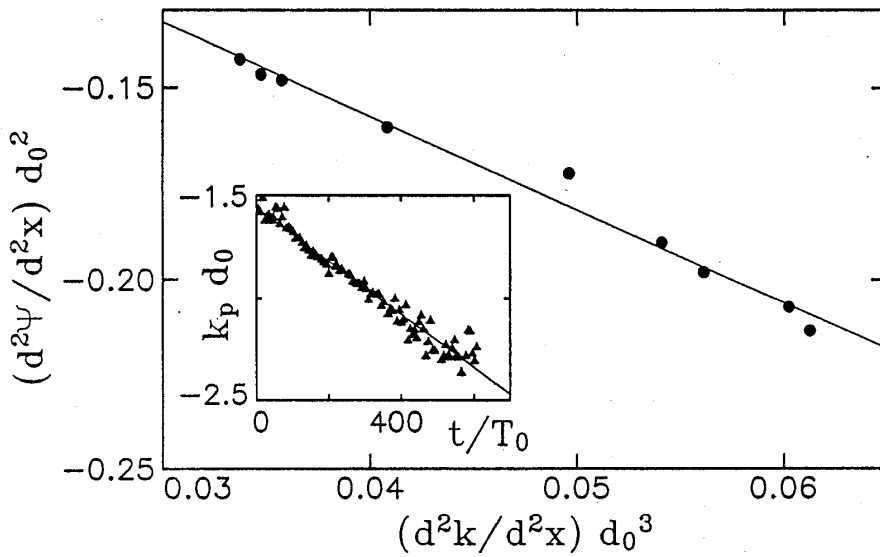


図20
2種の曲率 k_{xx} と ψ_{xx}
の関係 (傾きが D_ϕ/β' を与える。)

D_ψ の決定には、特別の液晶セルを用いた¹⁵⁾。液晶セルの透明電極を2つの領域に分け、片側に高い電圧、もう一方に少し低い電圧を印下し、高い電圧側で発生したTarget Patternの振動が低い電圧側 ($\mu < 0$ で $k = 0$ が成り立っている) に侵入していく侵入深さから決定する方法をとった。その結果 $D_\psi \approx 0.71(d_0^2/T_0)$ という結果を得た。

これらの測定結果を検討すると、位相不安定の条件 $\beta'\xi'/D_\psi D_\phi > 0$ を確かに満たしていて、さらに $\xi' < 0$, $\beta' < 0$ という符号は、格子の波数が減少する場所で振動の位相が進む (Target Patternの中心から波が発生する) という観測結果とも一致している。また (16b) 式の右辺に測定値を代入して評価した波数 k の成長率 k_t も実測値と数%の誤差で一致することなどから、我々の実験系は (16) 式で正しく表されていると考えられる。

3.4 局在化のメカニズム

次にTarget Patternの局在化のメカニズムについて考えよう。そのためには、振動の位相だけでは不十分で振幅まで含んだ (14a) 式までもどる必要がある。(14a) 式の右辺、結合項の実係数部分は、 $\xi_1 \phi_x A = \xi_1 k A$ という形をしており、第1項目とまとめると

$\mu' A \equiv (\mu + \xi_1 k) A$ と書くことができる。このことはHopf分岐のパラメータ μ が格子の波数シフトにより変えられて μ' になることを示している。実際にこの係数 ξ_1 を測定するため、振動が開始する電圧を一樣な格子の波数 k の関数として測定したのが図27である。最適な波数 $k = 0$ でのHopf分岐が起こる電圧を V_H とくと、 $\mu \equiv (V - V_H)/V_H$ であるから図21から ξ_1 は負であることが解かる。

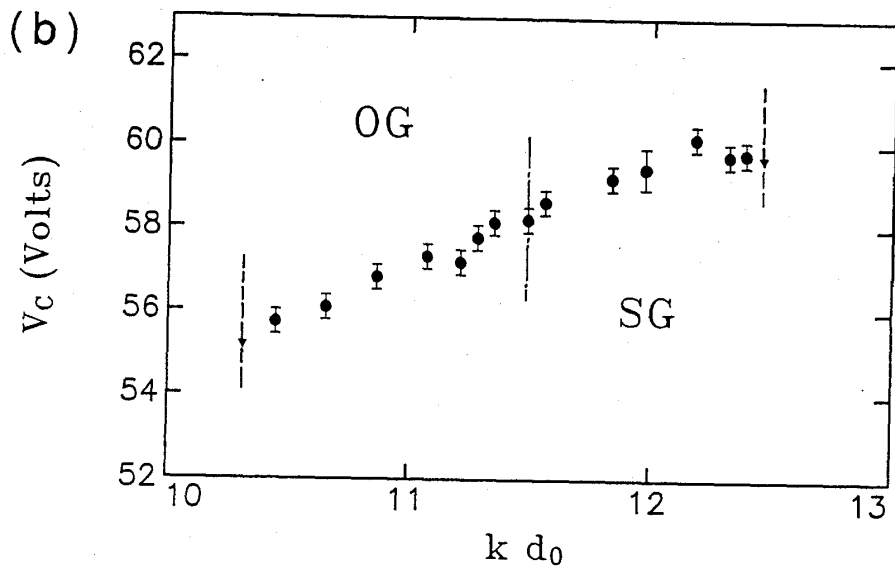


図21
Grid PatternのHopf分岐の
格子の波数シフトに対する
依存性（傾きは $-\xi_1$ を与え
る。）

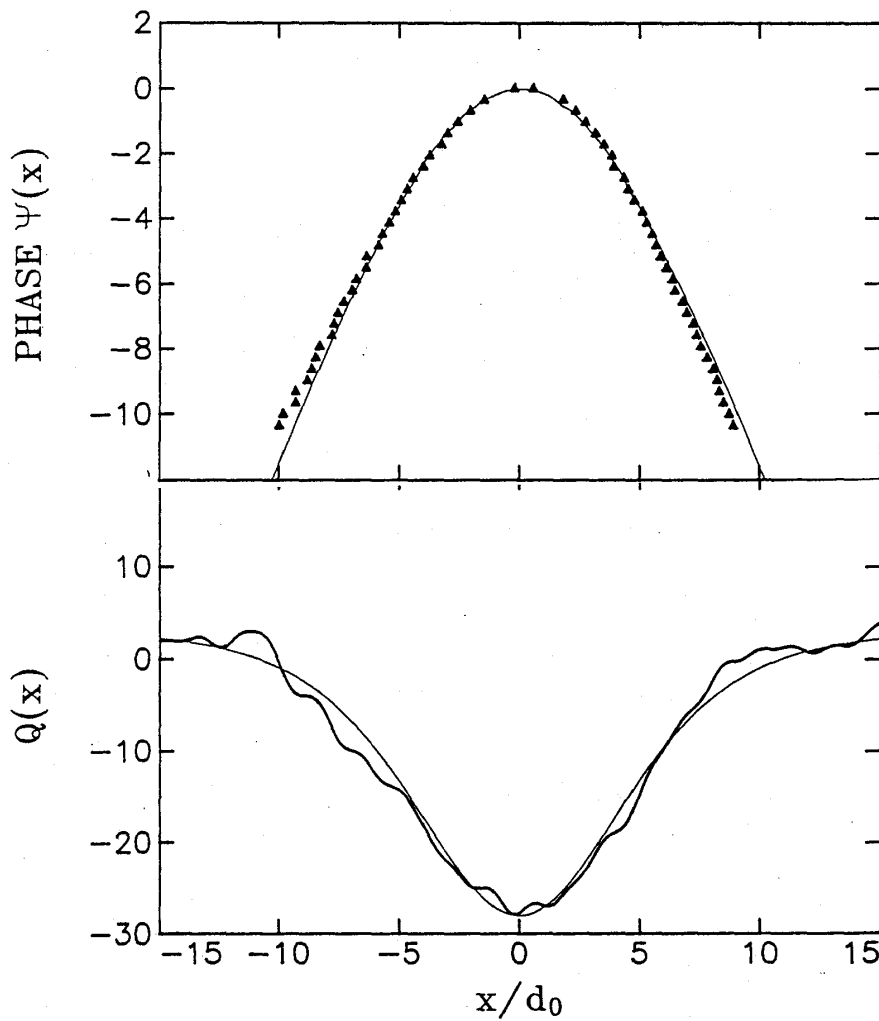


図22. 孤立波の解析解と測定値の比較（上図は振動位相、下図は格子の波数シフト）

μ が小さいとき $k = 0$ 一様状態からスタートし、不安定性によりわずかの揺らぎからある場所で波数が減少し ($k < 0$) Target Pattern が形成される場合を考える。この時中心で波数が減少すれば、全空間ではロールの個数は保存されなければならないので、Target Pattern の外側では波数が上昇する ($k > 0$)。 ξ_1 は負であるから外側では、 μ' が負になり振動が抑制され、波動は急速に減衰する。これが局在化のメカニズムである。他に局在した振動解を与える例としては、2成分対流系の実験¹⁷⁾ に関連して作られたFauve等の理論¹⁶⁾ がある。

更にSakaguchi¹³⁾ は、(13) 式について孤立波的な局在した解析解が存在することを見いだしている。それによれば、 $\Psi(x)$ および $k(x)$ は次のような形をしている。

$$\Psi(x, t) = C_0 + C_1 \int_{x_0}^x \tanh(kx) dx \quad (17a)$$

$$k(x, t) = Q_0 + Q_1 \operatorname{sech}^2(kx) \quad (17b)$$

実験結果に (17) 式を当てはめたのが図22である。

3.5 崩壊過程について

Target パターンの発生と成長については分かったが、崩壊とDislocationの生成についてはどうであろうか。Sakaguchiは、(14)式の計算結果からもう一つの不安定性 (Eckhaus Instability) が関与しているという興味ある予測をしている。(15b)式の ϕ_{xx} の係数、(すなわち位相に関する拡散係数) は、ベナール対流系などでは次のようになることが知られている。

$$D_\phi \equiv \frac{1-3k^2}{1-k^2}$$

但し、 k は最適な波数 k_{opt} からのずれである。波数が最適な波長から離れすぎると $D < 0$ (for $|k| > \frac{1}{\sqrt{3}}$) となってしまう、位相の不安定化が起こり、波長が変化する (Eckhaus Instability)。このとき y 方向に非一様性が存在すると局所的に新しいロールの対 (Dislocation) が発生することも知られている。その結果、最適な波長の状態に近づくのだが、最適な波長の状態は位相不安定なためとどまることはできず、以上のプロセスを繰り返すことになる。つまり、全体としての運動は二つのサドルをつなぐヘテロクリニック軌道となる。この構造が、時空カオスを生みだすもとになっていると考えられる。

Target Patternの崩壊と生成のサイクルを中心での波数と振動数を時間を追って測定し、波数と振動数の空間に埋め込んで見たのが図24である。二つのサドルを結ぶ軌道らしきものが見えてくるのがわかる。

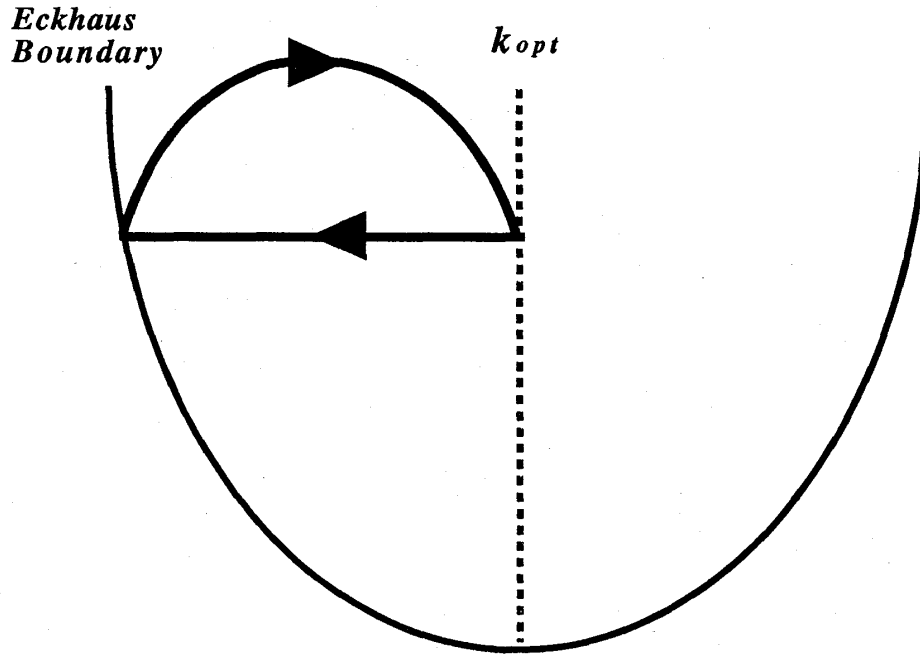


図23. 崩壊とカオス化のメカニズム (ヘテロクリニック軌道の存在)

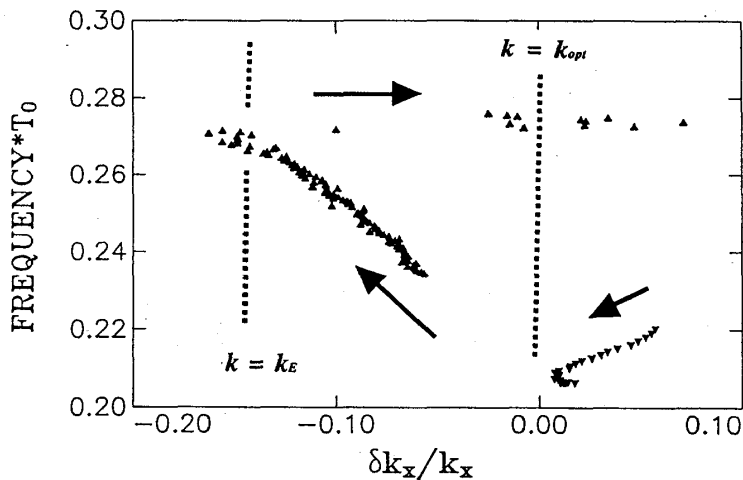


図24 崩壊と生成のサイクルにおけるTarget中心での波数と振動数の描く軌道。

(13b)式または(14b)式は、拡散係数が負になると解が発散してしまい、Dislocationの生成を記述することが出来ない。Sakaguchi¹³⁾は、空間の基本パターンがトポロジカル欠陥を含むことができるように、空間パターンについても位相 $\phi(X, T)$ だけでなく振幅 $B(X, T)$

まで考慮した方程式を提案した。位相 $\phi(X, T)$ が特異点を持つときそこで振幅 $B(X, T)$ がゼロになっていればトポロジカル欠陥を記述できるからである。

$$A_t = \mu A - (1+ic_2) |A|^2 A + (1+ic_1) A_{xx} + (\xi_1 + i\xi_2) \{B_x \bar{B} - B \bar{B}_x\} A \quad (18a)$$

$$B_t = B - |B|^2 B + B_{xx} + \beta \{(1+i) A_x \bar{A} - (1-i) A \bar{A}_x\} B \quad (18b)$$

しかし、この方程式でもまだカオス現象は記述できない。(18b)式のEckhaus Instability

により発生したDislocationは、Target Patternの外側（y軸方向）へ運動していきついには境界から消滅してしまい、格子は元の周期性を回復してしまうからである。得られる結果は、Target Patternの生成と崩壊を周期的に繰り返すヘテロクリニック軌道になってしまい、非周期性はどこにも現われない。この原因は、いままで触れずにきたが、Grid Patternの生成機構が実はまだ理解されていないことと関連している。Grid Patternの生成が、Grid Patternの振幅が0の状態から連続的に現われる場合は、(18b)式は正しい。しかし、現実にはGrid Patternは、Fluctuating Williams Domain (FWD)と呼ばれる極めて乱れた状態から、最初はパーコレーションの様に徐々に現われ、パーコレートした後、全空間を埋め尽くして完成する。このときヒステリシスは見られない。したがって、単純に(18b)式を5次まで拡張しても崩壊後の振る舞いが実験と一致するとは考えられない。このことは、Grid Pattern中のDefectが単純なDefectではなく、内部が乱流状態になっていることとも関連している。このためDefect自身が複雑で不規則な運動をする。(18b)のような式では、Defectのコアでパターンの振幅が0となってしまう、むしろ静的なDefectとなってしまう。Fluctuating Williams Domain (FWD)では(3)式のような二つの斜めのロールの状態間を振動しているように見えるのに対して、Grid Patternが現われるときは2つの状態がロッキングを起こすことにより静止しているように見える。Defectのコアでは、ロッキングが外れるために乱流的(FWD)になっているのかも知れない。このような崩壊過程の複雑さを記述する方程式はどんなものだろうか。それは今後の課題である。

4. 振動外場に対する応答²⁴⁾

これまで見てきたとおり、対流系が振動モードに対して不安定になると、空間的な広がりのために2次元の振動場と呼べる状態が出現することになる。振動場は、格子という空間構造がなくともそれ自体でいろいろと面白い現象を見せてくれる。振動の引込み現象や、振動の位相の特異点に由来する渦、位相不安定からくる位相乱流状態などである。また、振動外場によって強制的に振動の引込みを行なわせた場合も非常に興味ある現象が起こる。以下では、外場によってパラメトリック共鳴を起こした場合に生ずるPhase Shift Line (一種の動的なDomain Wall)について述べる。

4.1 Phase Shift Line (位相ひも)

Grid Patternの振動数は、実験でスペクトラムを観測すると、ある振動数 ω_i の周りに分布している ($i=1$ はPW1の周波数であり、 $i=2$ はPW2の周波数)。この自然な振動数 ω_i に対して液晶の印下電圧を次のように周波数 ω で振幅変調して加えてやり、系の応答を観察する。

$$E(t) = E_0 (1 + \varepsilon \cos \omega t) \cos \omega_0 t$$

ここで ω_0 は、約 600 Hz、 ω は数 Hz である。すると $\omega \approx 2\omega_0$ ；または $\omega \approx \omega_0$ ；($i=1,2$) のとき特に強い引込みが起こって Target Pattern は消失し、定在波 (standing wave) が生じる。これらの場合には、下の空間構造 (格子) は、ほぼ等間隔であることから格子の変形はあまり考慮する必要はないと思われる。以下では、もっとも引き込みやすい $\omega \approx 2\omega_0$ の場合 (すなわち外力の周波数が自然周波数の 2 倍) のパラメトリック励起の時に起こる現象について述べる。パラメトリック共鳴の状態では、二つの等価な引込状態が存在し、その二つの状態の位相差は π である。このとき二つの安定な状態を隔てる Domain Wall に相当するものが、ここで述べる Phase Shift Line (位相ひも) であり、Line (ひも) の両側では振動の位相が π だけシフトしている。図 25(a)(b) は実験で観測された位相ひもの例である。Grid Pattern の振動振幅 (辺の傾き) を測定し、その振動振幅をひもを横断する直線上で測定すると、確かに両側で位相が π だけシフトしていることが解かる。

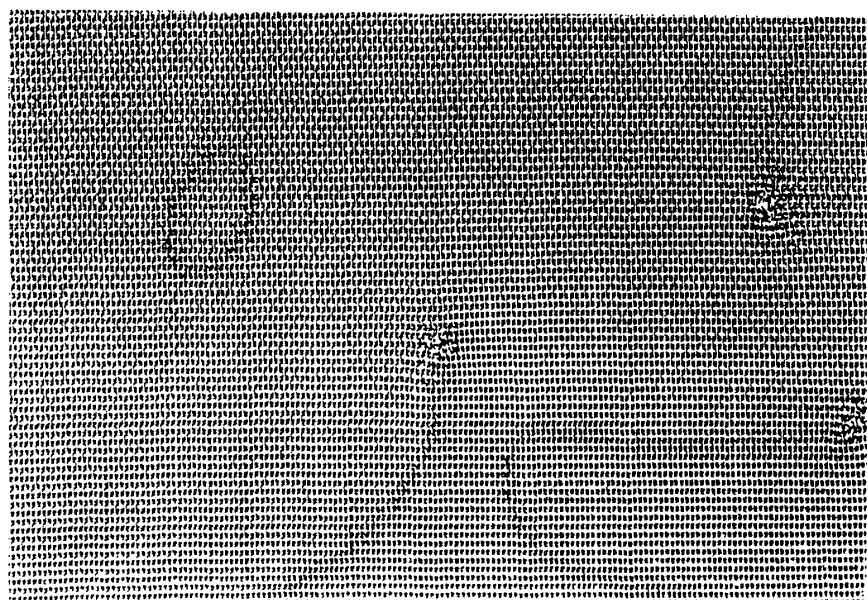


図 25(a)
 $\omega \approx 2\omega_0$ で見られる
 位相ひも

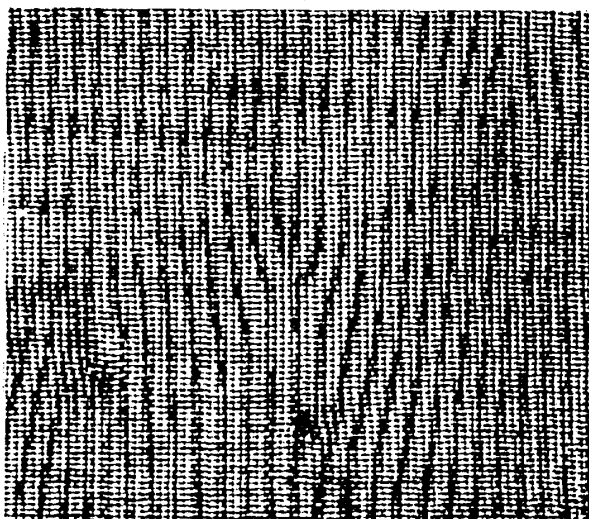


図 25(b)
 $\omega > 2\omega_0$ で見られる
 位相ひも

次に外力の振動数を $\omega \approx 2\omega_0$ から次第に増していくと、ひもは折り畳まれ等間隔に整

列し、図25(b)のようになる。PW1モードの場合は、この間隔は外力の周波数を上昇させると縮まるが、PW2の場合は逆に間隔が広がる。この定在波の波数と周波数の関係は、引込状態における一種の分散関係と見ることもできる。図27にその結果を示した。

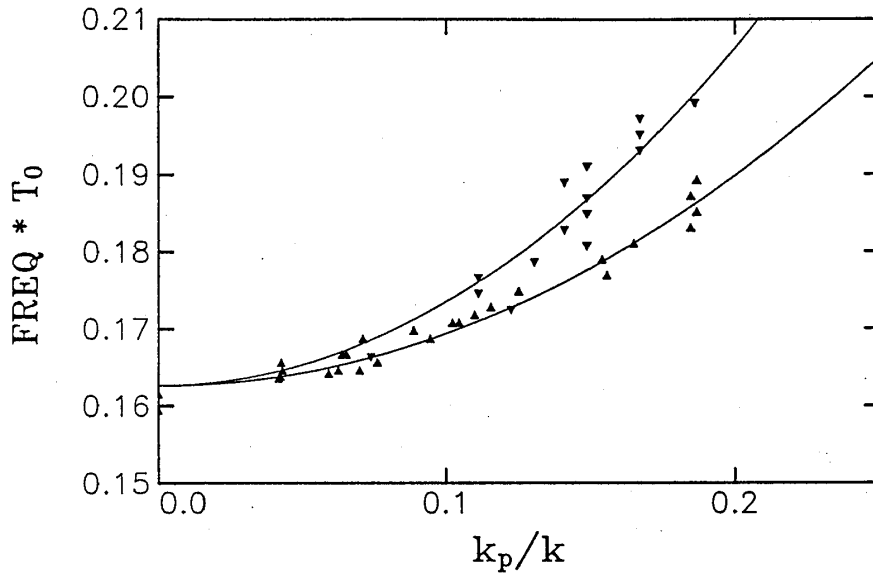


図27
位相ひもが作る定在波の
分散関係
(上が縦波、下が横波)

4.2 複合欠陥 (Hybrid Defect)

図25(a) に示したように、位相ひもには閉じたループをなすものと、端点を持った開いたものが存在する。閉じたループをなすものは、Domain Wallなどで一般に見られるものであるが、端点を持つものは一般に見られることはない。端点がどうなっており、何故生ずるかに着目すると面白いことが解かる。

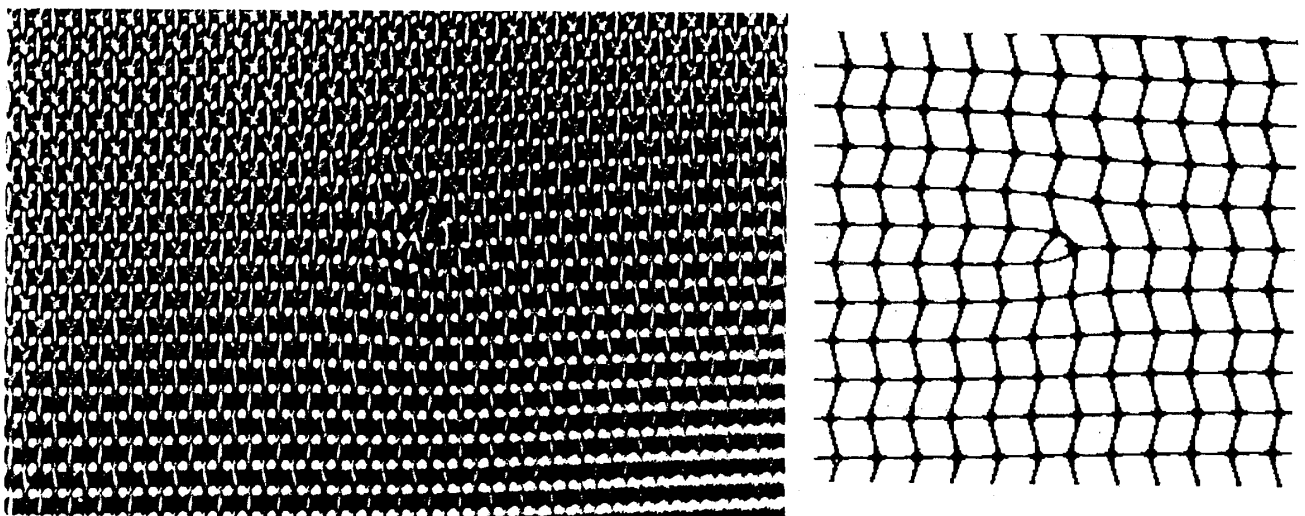


図28 位相ひもの端点の拡大図 (右は、模式図)

図28は、位相ひもの端点の拡大図を模式的に書いたものである。端点は空間周期構造（格子）のDislocation になっていることが解かる。Grid Patternで観測されるDislocationには図29の(a)と(b)のタイプおよびそれらを90度の倍数だけ回転させたものがある。その他のタイプは今のところ見つかっていない。

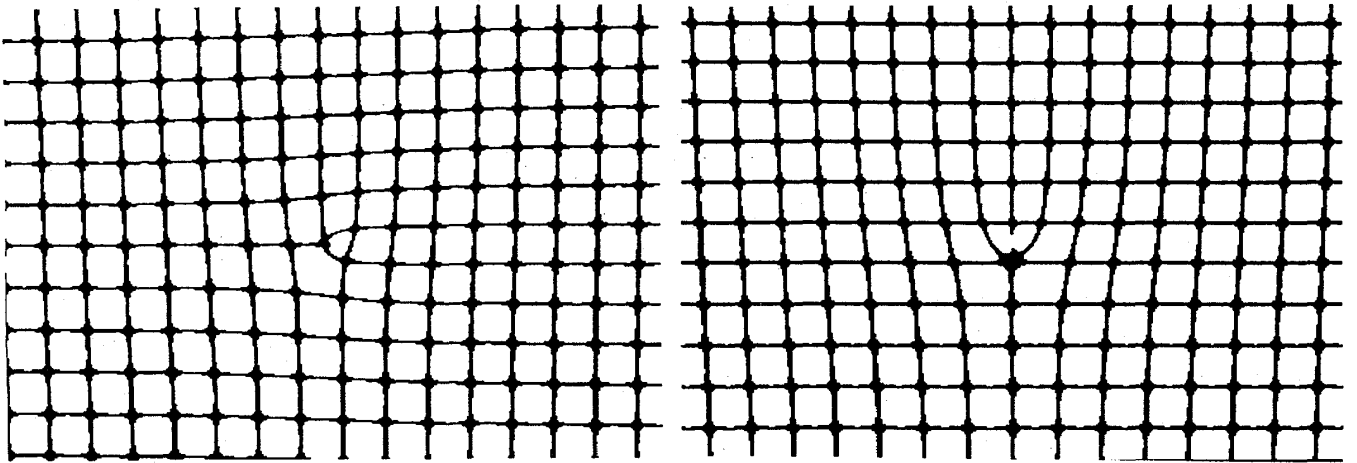


図29 (a)は $(+1/2, +1/2)$ 、(b)は $(0, +1)$ のトポロジカルチャージを持つ欠陥

(a)のタイプの欠陥は、Grid Patternが2つの斜めのロール構造の重ね合わせであると考えないと理解できない。

$$U_0(x, y) = B^+ \cos(k_x x + k_y y + \phi_+) + B^- \cos(k_x x - k_y y + \phi_-)$$

ただし、 $\phi_x = (\phi_+ + \phi_-)/2$ 、 $\phi_y = (\phi_+ - \phi_-)/2$ である。(a)のタイプの欠陥を表すには ϕ_+ または ϕ_- が欠陥の位置で特異的になり、同時に対応する一方の振幅 B が0になっている。つまり、 $B(x, y)$ は、遠方で一様解に近ずき、欠陥のコアでゼロとなるような関数である。また、位相のgradientを欠陥のコアを囲む閉曲線 Γ で積分したとき、

$$\oint_{\Gamma} \phi \, dl = \pm 2\pi$$

となることが、dislocationの存在を表す。そのためには、例えば

$$\phi(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$$

ととればよい。そのようにして計算された(a)のタイプの欠陥が図29である。(b)のタイプの欠陥は ϕ_+ と ϕ_- の両方が同時に欠陥を含む場合である。欠陥の種類をトポロジカルチャージで表そう。 (ϕ_+, ϕ_-) の表示では、(a)は $(+1, 0)$ 、(b)は $(+1, +1)$ で表されるが、 (ϕ_x, ϕ_y) の表示では、それぞれ(a)は $(+1/2, +1/2)$ 、(b)は $(0, +1)$ で表される。このようにして見掛け上、トポロジカルチャージが1/2の欠陥が現われることになる。実験で観測されたものは、 $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ と $(0, \pm 1)$ などである。

振動場のトポロジカル欠陥は、渦 (spiral) に対応する。この場合は、振動場の振幅 $A(X, Y)$ と振動の位相 $\psi(X, Y)$ について上と同じように議論すればよい。実験で見つかった spiral は、現在のところ腕が2本のもの (位相のとび 2π) だけである。

このように、Grid Pattern のトポロジカル欠陥には、2つの場に対応して2種類の欠陥が存在するが、通常は2種類の欠陥は独立に存在している。しかし、パラメトリック励起された系で明らかになったことは、これらの2種の欠陥が結合した複合欠陥として、位相ひもの端点が現われるということである。

位相ひもの端点を拡大してみると図28の様に、 $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ の格子欠陥が端点になっていることが解かる。このとき振動モードである PW1 がオペレータ

$P : (\phi_x, \phi_y) \rightarrow (\phi_x + \pi, \phi_y + \pi)$ に対して反対称 $PV = -V$ になっているため、 $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ の欠陥が存在するとその週辺で振動位相が π だけとぶことになる。これは、Sasa 等により最近理論的に研究された²⁰⁾。これがひもの端点が現われる原因である。一般的に考察すると $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ の格子欠陥には、奇数本のひもが、 $(0, \pm 1)$ の欠陥には偶数本のひもが接続できる。図30に3本の紐がくっついた $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ の欠陥の例を示す。この場合は、3本のうち2本が閉じたループを作り、投げ縄のような形を作っている。

PW2 モードは、 P に対して対称モードになっているため、 $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ の欠陥を位相ひもが通過することがしばしばあるが、その数がいつも偶数本のため端点とはならない。

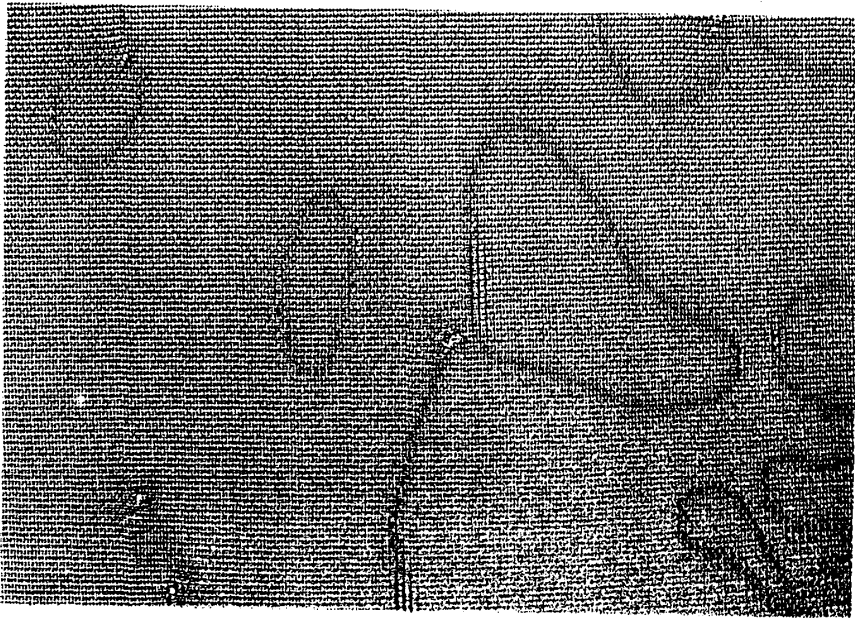


図30 投げ縄

4.3 位相ひもの運動

図27に示したようにPW1を強制振動すると、 $\omega \approx 2\omega_i$ でひもの定在波の波長が長くなり（無限大に近づく）、ひものは直すぐになろうとするため極く少数本の直線だけが残る。この状態からさらに外力の周波数を下げていくとある周波数で引き込みが不安定になり、再び波動の伝搬が見られる。しかし、それほど低くない周波数では、引き込み状態は一見安定で波動の伝搬は見られないが、位相ひものが運動し始めるパラメータ領域がある。この状態は、直すぐで静止した位相ひもの状態が不安定化した状態と見ることもできるかもしれない。この状態では、ひものが動きだすだけでなく図31のように屈曲して閉じた環をその一部からはじき出したり、図32のように端点のあるひもでは、ひものが波打ちながら欠陥から放出される現象も観測される。

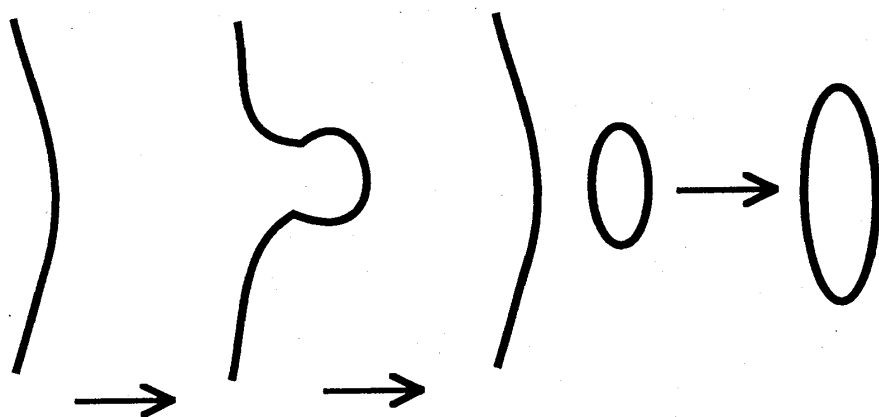


図31
 位相ひもの不安定化

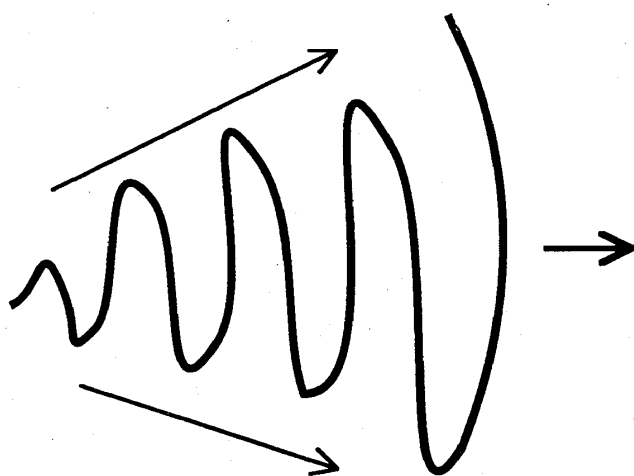


図32 端点をもつ位相ひもの波打ち現象

端点のある場合にひもがうねる現象は、引き込み状態は安定で、ひもだけが不安定になっているという仮説を支持する。なぜなら、引き込み状態が不安定であれば、欠陥のまわりで振動の位相が外力の位相に対して次第にずれる現象が見られる筈であるが、そのような現象は観測されずに位相ひもだけが運動するからである。

はじき出された閉じた環は、そのまま収縮して消滅する場合もあるが、一定方向にドリフト運動しながら大きくなる場合や、ドリフトしながら縮む場合など多彩な運動を示す。閉じた環が広がる現象は、Domain Wall の場合と比較すると特異な現象であることが解かる。ひもの両側の二つの引き込み状態は等価であり、どちらかがより優位で成長しやすいということはない。また、ひもが存在すると、位相がそこでシフトするため過剰なエネルギーが必要となり、一種の表面張力的なものを考えることができる。表面張力が正であれば環は、縮むはずである。環が同じ外部パラメータの条件下で縮んだり、広がったりするという事実は、不安定化した位相ひもについては表面張力のような概念はもはや有効ではなく、ひもの動力学を研究する必要があることを示唆している。最近、この種の現象に対して Ising Wall, Bloch Wall 転移という観点から理論的な研究が行なわれおり^{18, 19, 21)}、環の運動なども数値計算で観測され始めている²²⁾。

5. 結び

以上、実験とその数理的側面について書いてきたが、この種の研究は、実験と理論が非常に緊密な関係を保ちながら進められる課題が多いのも特徴である。それは、マクロなパターンや運動といったものを扱うため、対称性などの個々の系によらない共通の数理的解析が可能になるからである。そのことは、一方で物質を離れて、数理モデルの世界に行ったらまた帰ってこれない危険性をもはらんでいて、実験家にとっては少し数理的にすぎるといった印象さえ与える。個別の系は、ともすれば数理的世界の検証のための一つの手段にすぎなくなってしまうからである。しかし、幸いなことに人間の（理論家の）イマジネーションは、大抵の場合自然を越えられないため、ときたま実験は我々が気づかない法則の一面を垣間見せてくれることがある。（最も面白い場合は、理論の期待が完全に裏切られる場合であるが。）もちろん、数理的解析や計算機シミュレーションから実験へのフィードバックによる恩恵は測りしれない。このように、理論と実験とが互いの距離を測りながらダイナミックな関係と展開（ゲーム？）を実感できる分野と言えるかも知れない。今後まだまだ興味ある現象がでてきそうである。

この、ノートは1992年1月に、研究グループ内の理解を深める目的で東北大学通研の澤田研究室の内部資料として筆者が書いたものですが、編集委員のすすめで物性研究に載せて頂くことになりました。その後、加筆訂正して最近の結果も少し折りまぜこの最終的な形になりました。内容の誤りについて貴重な指摘を頂いた佐々真一氏や、このノートを書くための理解に役立つ議論をしてくださった澤田康次氏、坂口英継氏、蔵本由紀氏、水口毅氏、那須野悟氏、P. Coulet氏、小久保弘樹氏、佐藤勝善氏、B. Janiaud嬢に感謝します。

尚、実験データの多くは、時期は異なりますが小久保弘樹氏、佐藤勝善氏、B. Janiaud嬢、

川岸哲也氏等と共に実験して得られたものです。ここに感謝します。

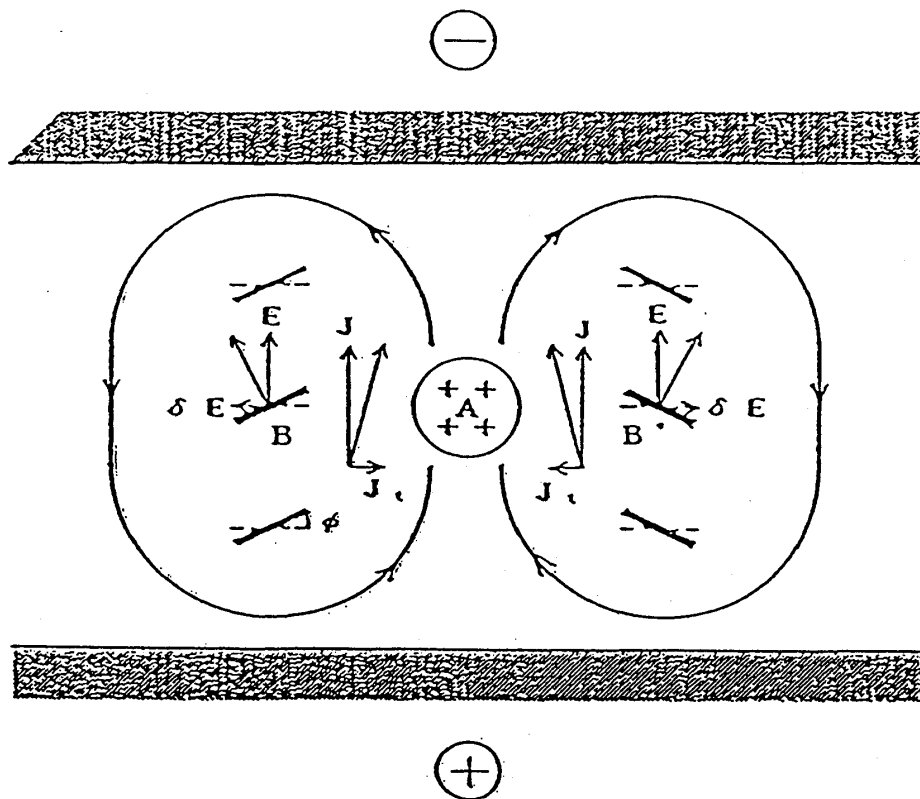
参考文献

- 1) E. Dubois-Viollet, P. G. de Gennes and O. Parodi, J. Phys. (Paris) 32, 305 (1971);
P. G. de Gennes, The Physics of Liquid Crystals (Clarendon, Oxford, 1973).
- 2) S. Kai and K. Hirakawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. 64, 212 (1978).
- 3) A. Joets and R. Ribbota, J. Physique, 47, 595 (1986).
- 4) S. Nasuno, M. Sano and Y. Sawada, J. of Phys. Soc. Jpn., 58, 1857 (1989).
- 5) M. Sano, K. Sato, S. Nasuno and H. Kokubo, Phys. Rev. A 15, 46, 3540 (1992);
M. Sano, K. Sato and B. Janiaud, in Pattern Formation in Complex Dissipative Systems,
ed. by S. Kai (World Scientific, 1992) p.286.
- 6) B. Janiaud, H. Kokubo and M. Sano, submitted to Phys. Rev. Lett. (1992).
- 7) L. Gil, G. Balzer, P. Couillet, M. Dubois, and P. Berge, Phys. Rev. Lett. 66, 3249 (1991).
- 8) J. M. Flesseles, A. J. Simon, and A. Libchaber, Advances in Physics, 40, 1 (1991).
- 9) C. D. Andreck, S. S. Liu, and H. L. Swinney, J. Fluid Mech. 164, 155 (1986).
- 10) S. Sasa, private communication
- 11) 蔵本由紀, 物性研究
- 12) P. Collet and G. Iooss, Phys. Rev. Lett., 64, 866 (1990).
- 13) H. Sakaguchi, Prog. Theor. Phys. 87, 241 (1992); Prog. Theor. Phys. 87, 1049 (1992).
- 14) F. Daviaud, J. Lega, P. Berge, P. Couillet and M. Dubois, Physica 55D, 287 (1992).
- 15) H. Kokubo et al., to be published.
- 16) S. Fauve and O. Thual, Phys. Rev. Lett. 64, 282 (1990).
- 17) E. Moses, J. Finberg, and V. Steinberg, Phys. Rev. Lett. 62, 1619 (1989).
- 18) P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh and J. Lajzerowicz, Phys. Rev. Lett. 65, 1352
(1990).
- 19) J. Lajzerowicz and J. J. Niez, J. de Phys. Lett. 40, 165 (1979).
- 20) S. Sasa, T. Mizuguchi, and M. Sano, Europhys. Lett. 19, 593 (1992).
- 21) H. Sakaguchi, Prog. Theor. Phys. 88, 663, (1992).
- 22) T. Mizuguchi and S. Sasa, Prog. Theor. Phys. (1993) to appear.
- 23) S. Sasa, private communication.
- 24) K. Sato and M. Sano, to be published; M. Sano, to be published.

付録 1 . 液晶の電気対流

棒状の分子では、個々の分子の重心の間に固体のような長距離秩序はないが、液体のように全く無秩序ではない中間的状态をとることができる。この状態を液晶と呼ぶが、そのうち、ネマチック液晶と呼ばれる分子の方向が一方向にそろった秩序状態がある。電気対流では主にこの状態を用いる。下図のように2枚の透明電極の間に薄くサンドイッチした状

態を考える。



付図1 液晶の電気流体力学的な不安定

液晶分子の方向は、機械的力あるいは化学的力（電極あるいはその上の被服膜の界面での力）、または磁場（体積力）などでX方向に揃えてあるとする。Y 軸方向に直流電界をかけた場合を考える。液晶は棒状であるため誘電率や導電率に異方性を持っている。それを ϵ_{\parallel} , ϵ_{\perp} および σ_{\parallel} , σ_{\perp} と書く。今、 $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$, $\sigma_{\parallel} > \sigma_{\perp}$ とする。今仮に分子の方向 (Director) が、角度 ϕ だけ傾いたとすると、電流の水平成分 J_x のために電荷 q が蓄積される。この電荷のせいで流体は電気力 qE を受け、従って分子は回転トルクを受ける。また、電荷により電界は、 E から $E + \delta E$ へと変化し、 $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$ であるため Director は、電界に垂直になろうとする結果、角度 ϕ をさらに増加させるようなトルクを感じる。このように初期に Director のゆらぎがあればそれはますます助長されて不安定となり対流を起こすことになる。

これに対して復元力は、曲げ(bend)に対する弾性力で、 $-Kk^2 \phi$ と書ける。（ K は、曲げに対する弾性率で、弾性力は曲率に比例し、 $\phi(x) = \phi \sin(kx)$ 程度とすると、曲率は2回微分に比例することから得られる。また、対流の構造の波数 $k \sim 1/d$ である。）また、 $q \sim \phi E$ であるから、不安定に寄与するトルクは2種類とも、 ϕE^2 に比例する。両者のバランスから、対流の起こる臨界電圧 $V_c = E_c d$ は、次のように決まる。

$$\phi E_c^2 \sim \phi K/d^2$$

$$V_c = \text{const.}$$

良く用いられるネマチック液晶のMBBA (N-(p-methoxybenzyliden)-p-butylaniline) では、 V_c は約 7 V である。

ここまでは、直流電界で説明したが、実際にはイオン注入による電極の劣化を防ぐため一般に交流電界を用いる。このときは、2つのタイムスケールが問題となる。一つは、電荷の緩和時間 τ で、他の一つはdirectorの緩和時間 T である。電荷密度の式は、電荷の保存則と、オーム則、ポアソンの式、及び電荷の蓄積が ϕE に比例することから次のようになる。

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} + \sigma_h \phi E = 0$$

ここで、電荷の緩和時間は、

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sigma_{//}}{\epsilon_{//}}$$

一方、directorの緩和の式は、電気力によるトルクを考慮して、

$$\dot{\phi} + \frac{\phi}{T} + \frac{qE}{\eta} = 0$$

ここで、directorの緩和時間は、次のようになる。

$$\frac{1}{T} = c_1 E^2 + c_2 K k^2$$

ここで、 h は、実効的な粘性率である。

交流電界の周波数 f が、

$$1/T \ll f \ll 1/\tau$$

の様な条件にあるときには、directorの角度 ϕ がslow variable になり、電界の極性の反転に従って電荷密度の減衰と極性の反転が起こり、一方 ϕ は、定常にとどまり、直流の場合と現象は変わらない。

付録2 Complex Demodulation

例えば空間パターンを、 $f(x)$ と表すことにすると、 $f(x)$ をフーリエモードの基本波とその和という形、 $f(x) \approx A(X)\cos(kx + \phi(X)) + \dots$ に書くことができる。ただし、 $A(X)$ 、 $\phi(X)$ は基本波よりゆっくりと変化する振幅と位相である。 $f(x)$ に \cos や \sin をかけ低周波フィルターにかけて基本波より低い周波数成分だけをとる。この操作を $\langle \rangle_{\text{lowpass}}$ と書くと、

$$R(X) \equiv \langle f(x) \cos(kx) \rangle_{\text{lowpass}} = A(X) \cos \phi(X)$$

$$I(X) \equiv \langle f(x) \sin(kx) \rangle_{\text{lowpass}} = A(X) \sin \phi(X)$$

となるので、 $A(X)$ 、 $\phi(X)$ は次のようにして得られる。

$$A(X) = \sqrt{R^2(X) + I^2(X)}, \quad \phi(X) = \tan^{-1}(I(X)/R(X))$$

実験でよく用いるロックインアンプと同じ原理である。